

*Seria „MATEMATICĂ“*

---

**ANALIZĂ MATEMATICĂ**  
**Calcul diferențial**

## **MATHEMATICAL ANALYSIS**

### **Differential calculus**

The present book is the first part of the course of Mathematical Analysis given by the author for many years at the Technical University of Civil Engineering of Bucharest. It contains: Sequences and Series of Numbers, Sequences and Series of Functions, Power Series, Taylor's Series, Metric Spaces, Normed and Hilbert Spaces, Functions of Several Variables, Limits and Continuity, Partial Derivatives, Differentiable Functions, Taylor's Formula, Local Extremum of a Function, Implicit Functions, Local Conditional Extremum, Dependent Functions.

This list itself demonstrates that the book provides the engineering disciplines with the necessary information of differential calculus of functions with one and several variables.

We tried to offer the fundamental material concisely and without distracting details. We focused on the presentation of basic ideas of differential calculus in order to make it detailed and as comprehensible as possible. The numerous examples also serve this aim.

Besides students in technical faculties and those starting a mathematics course, the book may be useful to engineers and scientists who wish to refresh their knowledge about some aspects of mathematics.

Lucrarea a fost realizată în cadrul Contractului de Grant nr. 39643 / 11.08.1998, CNFIS, cod 54, acordat de către Banca Mondială și Guvernul României.

**Prof. univ. dr. GAVRIIL PĂLTINEANU**

**ANALIZĂ  
MATEMATICĂ  
Calcul diferențial**

*Seria „MATEMATICĂ”*



**Editura AGIR**  
**București, 2002**



ASOCIAȚIA GENERALĂ A INGINERILOR DIN ROMÂNIA  
© EDITURA AGIR, 2002  
Editură acreditată de C.N.C.S.I.S.

Toate drepturile pentru această ediție  
sunt rezervate editurii.

Adresa: **Editura AGIR**  
Calea Victoriei, nr. 118, sector 1, 70179 București  
Telefon: 401-212 81 04; 401-212 81 06 (redacție)  
401-211 83 50 (difuzare)  
Fax: 401-312 55 31; E-mail: office@agir.ro

**Referent:** prof. univ. dr. Gheorghe Bucur,  
Facultatea de Matematică,  
Universitatea București

Redactor: ing. **Adina NEGOIȚĂ**  
Coperta: **Camelia BOGOI**

---

Bun de tipar: 15.08.2002; Coli de tipar: 11,75  
ISBN 973-8130-90-5

---

**Imprimat în România**

## ***Prefață***

*Lucrarea se adresează studenților din anul întâi din universitățile tehnice și are la bază experiența de peste 20 de ani a autorului în predarea cursului de **Analiză Matematică** la Facultatea de Construcții Civile și Industriale din Universitatea Tehnică de Construcții București. Materialul prezentat corespunde programei analitice din semestrul întâi și este împărțit în patru capitole: **Șiruri și serii de numere reale, Șiruri și serii de funcții reale, Spații metrice. Spații normate și Spații Hilbert, Calculul diferențial al funcțiilor de mai multe variabile.***

*În vasta ofertă de cursuri de Analiză Matematică de pe piața cărții din țara noastră, diferența este dată de măsura în care se păstrează un echilibru rezonabil între rigoare și accesibilitate. Acesta a fost criteriul de bază în scrierea acestui curs și sperăm că, măcar parțial, am reușit acest lucru.*

*București,  
februarie 2002*

**G. Păltineanu**



## Cuprins

1. ȘIRURI ȘI SERII DE NUMERE REALE .....	9
1.1. Numere reale.....	9
1.2. Șiruri de numere reale (complemente).....	16
1.3. Dreapta încheiată. Limitele extreme ale unui șir .....	21
1.4. Serii numerice convergente și divergente.....	25
1.5. Serii cu termeni pozitivi.....	27
1.6. Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare .....	39
1.7. Calculul aproximativ al sumei unor serii.....	41
1.8. Serii absolut convergente.....	44
1.9. Operații cu serii convergente .....	47
2. ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII REALE .....	49
2.1. Convergență simplă (punctuală) și convergență uniformă .....	49
2.2. Formula Taylor .....	60
2.3. Serii Taylor și Mac Laurin.....	66
2.4. Serii de puteri.....	71
3. SPAȚII METRICE. SPAȚII NORMATE. SPAȚII HILBERT .....	79
3.1. Spații metrice. Principiul contracției .....	79
3.2. Spații normate.....	87
3.3. Spații Hilbert.....	88
3.4. Serii în spații normate.....	92
3.5. Funcții elementare Formulele lui Euler .....	96
3.6. Funcții de matrice .....	99
3.7. Elemente de topologie în $\mathbb{R}^n$ .....	102
3.8. Limite de funcții .....	112
3.9. Funcții continue .....	118
3.10. Proprietățile funcțiilor continue pe mulțimi compacte și conexe .....	122
4. CALCULUL DIFERENȚIAL AL FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABLE.....	128
4.1. Derivate parțiale Diferențiabilitate .....	128
4.2. Diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale. Matrice iacobiene .....	136
4.3. Diferențiabilitatea funcțiilor compuse .....	138
4.4. Diferențiala de ordinul întâi și invarianța formei sale .....	142

4.5. Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiale de ordin superior .....	144
4.6. Derivatele parțiale de ordinul doi ale funcțiilor compuse de două variabile .....	150
4.7. Formula Taylor. Extremele funcțiilor de mai multe variabile .....	152
4.8. Teorema de inversiune locală .....	158
4.9. Transformări regulate .....	162
4.10. Funcții implicite .....	165
4.11. Funcții dependente și independente .....	170
4.12. Extreme cu legături .....	175
4.13. Schimbări de variabile .....	180
4.14. Elemente de teoria câmpurilor .....	182
BIBLIOGRAFIE .....	188

# 1.

## Șiruri și serii de numere reale

### 1.1. Numere reale

În cele ce urmează vom nota cu  $\mathbb{N}$  mulțimea numerelor naturale, adică mulțimea

$$\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\} \text{ și cu } \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Pe mulțimea numerelor naturale sunt definite două operații: adunarea (notată cu  $+$ ) și înmulțirea (notată cu  $\cdot$ ).

Deoarece elementele din  $\mathbb{N}^*$  nu sunt simetrizabile nici față de adunare, nici față de înmulțire, operațiile de scădere și împărțire nu sunt posibile în  $\mathbb{N}$ . ( $\mathbb{N}$  nu are structură de grup nici față de adunare, nici față de înmulțire).

Pentru a face posibilă operația de scădere, la mulțimea numerelor naturale se adaugă mulțimea numerelor negative și se obține astfel mulțimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  este inel comutativ. Următoarea extensie a numerelor este mulțimea numerelor raționale  $\mathbb{Q}$ , adică mulțimea numerelor de forma  $p/q$ , unde  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ ,  $p$  și  $q$  prime între ele. În  $\mathbb{Q}$  sunt definite cele patru operații aritmetice: adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea (cu excepția împărțirii la zero). Din punct de vedere algebric  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  este corp comutativ.

Încă din antichitate s-a observat că mulțimea numerelor raționale nu este suficient de bogată pentru a servi la exprimarea măsurii oricărei mărimi din natură. Construcții geometrice foarte simple se conduc la mărimi a căror măsură nu se poate exprima cu ajutorul numerelor raționale. Cel mai simplu exemplu este diagonală unui pătrat de latură 1. Într-adevăr, conform teoremei lui Pitagora, pătratul lungimii acestei diagonale este 2 și este binecunoscut faptul că nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2. Este deci necesar să adăugăm la mulțimea numerelor raționale și numere de altă natură, pe care le numim numere iraționale și obținem mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}$ .

Dacă primele extensii ale mulțimii numerelor naturale  $\mathbb{N}$  și anume  $\mathbb{N}^*$  și  $\mathbb{Z}$ , au fost determinate de necesități algebrice, extensia de la  $\mathbb{Q}$  la  $\mathbb{R}$  este determinată de necesități topologice (de convergență). Mulțimea numerelor raționale suferă de o anumită "incompletitudine", deoarece, în această mulțime există șiruri monotone și

mărginite care nu au limită (în  $\mathbb{Q}$ ). Vezi de exemplu șirul  $a_0 = 1$ ;  $a_1 = 1,4$ ;  $a_2 = 1,41$ ;  $a_3 = 1,414$ ; ... a cărei limită este  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Prin crearea mulțimii numerelor reale se înlătură acest "defect".

În  $Y$ , orice șir monoton și mărginit are o limită. Nu ne propunem să prezentăm aici construcția numerelor reale. O să spunem numai că se poate construi o mulțime  $Y$  care conține corpul numerelor raționale  $\mathbb{Q}$ , pe care sunt definite două operații, adunarea (notată cu  $+$ ) și înmulțirea (notată cu  $\cdot$ ) și o relație de ordine (notată  $\leq$ ) astfel încât  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  este corp comutativ total ordonat, care satisface în plus următoarele proprietăți:

(P.A.) (**Axioma lui Arhimede**)

Pentru orice  $x \in Y$  și orice  $y \in Y, y > 0$  există  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $ny \geq x$ .

(PC) (**Axioma lui Cantor**)

Dacă  $\{a_n\}$  și  $\{b_n\}$  sunt două șiruri de numere raționale care au următoarele proprietăți:

$$1) a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0^*)$$

atunci există  $c \in Y$  (unic) astfel încât  $a_n \leq c \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Prin urmare, din punct de vedere algebric,  $Y$  este grup abelian față de adunare, având elementul neutru 0, iar  $Y \setminus \{0\}$  este grup abelian față de înmulțire, având elementul neutru 1. În plus are loc proprietatea de distributivitate:

$$x(y + z) = xy + xz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

Relația de ordin " $\leq$ " este **totală**, adică pentru orice  $x, y \in Y$  avem sau  $x \leq y$  sau  $y \leq x$  și **compatibilă** cu structura algebrică:

$$x' \leq y' \text{ și } x'' \leq y'' \text{ atunci } x' + x'' \leq y' + y''$$

$$x \leq y \text{ și } \alpha \geq 0 \text{ atunci } \alpha x \leq \alpha y$$

Din faptul că  $Y$  este corp comutativ total ordonat rezultă toate regulile de calcul cu numere reale.

**Observația 1.1.1.** Axioma lui Arhimede este echivalentă cu următoarea proprietate:

$$\forall x \in Y, \exists [x] \in \mathbb{Q} \text{ astfel încât } [x] \leq x < [x] + 1$$

( $[x]$  se numește partea întreagă a lui  $x$ ).

Într-adevăr, dacă  $x \in \mathbb{Q}$ , atunci  $[x] = x$ . Dacă  $x \in Y \setminus \mathbb{Q}$  și  $x > 0$ , atunci considerând în axioma lui Arhimede  $y = 1$ , rezultă că există  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $x < n$ . Fie  $n_x$  cel mai mic număr natural mai mare ca  $x$  și fie  $[x] = n_x - 1$ . Se verifică imediat că:

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

---

\*)  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $b_n - a_n < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ .

Dacă  $x \in \mathbb{Y} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $x < 0$ , atunci  $[x] = -[-x] - 1$ .

Reciproc, fie  $x \in \mathbb{Q}_+$  și  $y > 0$ . Dacă notăm cu  $n = \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil + 1$ , atunci

$$ny > \frac{x}{y}y = x.$$

**Propoziția 1.1.1.** Pentru orice  $x, y \in \mathbb{Y}$  în situația  $x < y$  există  $r \in \mathbb{Q}$  astfel încât

$$x < r < y.$$

*Demonstrație*

**Cazul 1:**  $x = 0 < y$ . Deoarece  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , există  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\frac{1}{n_0} < y$  și alegem  $r = \frac{1}{n_0}$ .

**Cazul 2:**  $0 < x < y$ . Fie  $a = \frac{1}{2}(y-x) > 0$  și fie  $r_1 \in \mathbb{Q}$  cu proprietatea  $0 < r_1 < a$ .

Dacă notăm cu  $r = r_1 \left( \left\lceil \frac{x}{r_1} \right\rceil + 1 \right)$ , atunci  $r \in \mathbb{Q}$  și avem

$$r \leq r_1 \left( \frac{x}{r_1} + 1 \right) = x + r_1 < x + \frac{1}{2}(y-x) = \frac{1}{2}(x+y) < y.$$

Pe de altă parte  $r > r_1 \cdot \frac{x}{r_1} = x$ . Așadar,  $r \in \mathbb{Q}$  și  $x < r < y$ .

**Cazul 3:**  $x < 0 < y$ . Alegem  $r = 0$ .

**Cazul 4:**  $x < y < 0$ . Atunci  $\exists \bar{r} \in \mathbb{Q}$  astfel încât  $-x > \bar{r} > -y$ . Alegem  $r = -\bar{r}$ .

**Definiția 1.1.1.** O mulțime  $A$  se numește numărabilă dacă există o aplicație bijectivă  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ . Dacă notăm cu  $a_n = f(n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , rezultă că o mulțime este numărabilă dacă elementele sale pot fi puse sub forma unui șir

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

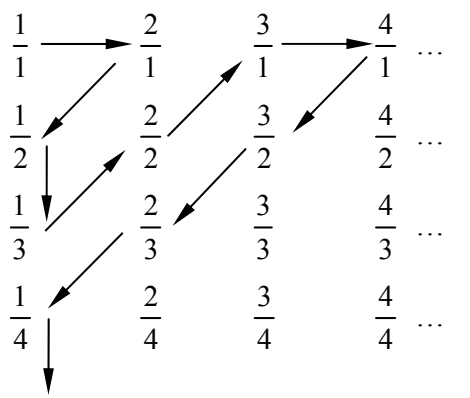
Se observă ușor că o reuniune finită de mulțimi numărabile este de asemenea o mulțime numărabilă.

**Propoziția 1.1.2.** Mulțimea numerelor raționale este numărabilă.

*Demonstrație*

Elementele mulțimii  $\mathbb{Q}_+$  pot fi puse sub forma următorului tablou:





Urmând săgețile, se observă că elementele mulțimii  $\mathbb{Q}_+$  se pot pune sub forma unui șir

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots \right\},$$

de unde rezultă că  $\mathbb{Q}_+$  este numărabilă. În mod analog  $\mathbb{Q}_-$  este numărabilă. Cum  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$  rezultă că mulțimea numerelor raționale este numărabilă.

**Propoziția 1.1.3.** Mulțimea  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1\}$  nu este numărabilă.

*Demonstrație*

Presupunem prin absurd că mulțimea  $[0, 1]$  este numărabilă, deci că  $I = [0, 1] = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ .

Împărțim intervalul  $I$  în trei intervale închise egale. Există cel puțin un subinterval (dintre acestea) care nu-l conține pe  $x_1$ . Notăm cu  $I_1$  acest interval. Împărțim acum intervalul  $I_1$  în trei părți egale. Există cel puțin un interval  $I_2$  care nu-l conține pe  $x_2$ . Procedând în continuare în acest mod obținem un șir de intervale închise

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots \text{ cu proprietatea că } x_n \notin I_n.$$

Pe de altă parte observăm că lungimea intervalului  $I_n$  este  $\frac{1}{3^n}$ .

Dacă notăm cu  $a_n$ , respectiv  $b_n$ , extremitățile intervalului  $I_n$ , obținem două șiruri de numere raționale  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  care îndeplinesc condițiile din axioma lui

Cantor. Rezultă că există  $y \in \mathbb{Y}$  astfel încât  $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset I$ .

Pe de altă parte este evident că  $y \neq x_n$  pentru orice  $n$ , deci  $y \notin I$ . Am ajuns astfel la o contradicție.

**Corolarul 1.** Pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  mulțimea  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$  nu este numărabilă.

Într-adevăr, mulțimile  $[a, b]$  și  $[0, 1]$  pot fi puse în corespondență bijectivă prin funcția  $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$  definită astfel:

$$f(x) = a + (b - a)x$$

**Corolarul 2.** Pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  există cel puțin un număr irațional  $z$  astfel încât  $a < z < b$ .

*Demonstrație*

Mulțimea numerelor raționale care aparține intervalului  $(a, b)$  este numărabilă, în timp ce mulțimea  $(a, b)$  este nenumărabilă. Dacă  $(a, b)$  ar fi numărabilă atunci  $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$  ar fi numărabilă, ceea ce este absurd. Rezultă că există  $z \in (a, b) \setminus \mathbb{Q}$ .

Din Propoziția 1.1.1 și 1.1.3 rezultă că între două numere reale se află o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.

**Propoziția 1.1.4.** Dacă  $\{x_n\}, \{y_n\}$  sunt două șiruri de numere reale cu proprietățile:

- 1)  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_2 \leq y_1$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ ,

atunci există  $z \in \mathbb{R}$  (unic) astfel încât  $x_n \leq z \leq y_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstrație*

Din Propoziția 1.1 rezultă că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  există  $a_n \in \mathbb{Q}$  și  $b_n \in \mathbb{Q}$  astfel încât

$$x_n - \frac{1}{2^n} < a_n < x_n \leq y_n < b_n < y_n + \frac{1}{2^n}. \quad (1.1)$$

Observăm că șirul  $\{a_n\}$  poate fi ales crescător, iar șirul  $\{b_n\}$  poate fi ales descrescător. Într-adevăr, fie  $a_1, \bar{a}_2 \in \mathbb{Q}$  astfel încât

$$x_1 - \frac{1}{2} < a_1 < x_1 \quad \text{și} \quad x_2 - \frac{1}{2^2} < \bar{a}_2 < x_2.$$

Dacă notăm cu  $a_2 = \max(a_1, \bar{a}_2)$  și ținem seama că  $x_1 \leq x_2$ , rezultă  $x_2 - \frac{1}{2^2} < a_2 < x_2$ . Evident  $a_2 \geq a_1$ . În continuare se poate arăta prin inducție completă că șirul  $\{a_n\}$  este crescător. Analog se poate arăta că  $\{b_n\}$  poate fi ales descrescător.

Deoarece  $0 < b_n - a_n < (y_n - x_n) + \frac{1}{2^{n-1}}$ , rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ . Din axioma Cantor rezultă că există  $z \in Y$ , unic, astfel încât  $a_n \leq z \leq b_n, \forall n$ . Cum  $\{x_n\}$  este crescător avem:

$$x_n - \frac{1}{2^{n+k}} \leq x_{n+k} - \frac{1}{2^{n+k}} \leq a_{n+k} \leq z, \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

În continuare avem  $x_n - z \leq \frac{1}{2^{n+k}}, \forall k \in \mathbb{N}$ , de unde rezultă  $x_n - z \leq 0$  și deci  $x_n \leq z, \forall n$ . În mod asemănător se arată că  $z \leq y_n, \forall n$ .

**Observația 1.1.2.** O mulțime de numere reale  $A$  se numește majorată (minorată) dacă există  $b \in Y$  astfel încât  $x \leq b$  ( $x \geq b$ ),  $\forall x \in A$ .

Numărul  $b$  se numește majorant (minorant). Este evident că dacă  $A$  admite un majorant (minorant) atunci admite o infinitate de majoranți (minoranți). O mulțime se numește mărginită dacă este majorată și minorată.

Se numește marginea superioară (inferioară) a mulțimii  $A$  cel mai mic majorant (cel mai mare minorant) al mulțimii  $A$ .

Marginea superioară a mulțimii  $A$  se notează cu  $\sup A$ , iar marginea inferioară cu  $\inf A$ .

**Teorema 1.1.1.** Orice mulțime de numere reale majorată (minorată) are margine superioară (inferioară).

#### *Demonstrație*

Vom demonstra existența marginii superioare. Dacă mulțimea  $A$  e finită, adică  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ , atunci evident  $\sup A = \max\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ .

Fie  $A$  majorată și infinită și fie  $a, b \in \mathbb{Q}$  astfel încât  $b$  este majorant pentru  $A$ , iar  $a$  nu este majorant pentru  $A$ . Fie  $c$  mijlocul intervalului  $[a, b]$ .

Dacă  $c$  este majorant pentru  $A$ , notăm cu  $[a_1, b_1]$  intervalul  $[a, c]$ , iar dacă  $c$  nu este majorant pentru  $A$  notăm cu  $[a_1, b_1]$  intervalul  $[c, b]$ . Fie  $c_2$  mijlocul intervalului  $[a_1, b_1]$ . Procedând ca mai înainte, notăm cu  $[a_2, b_2]$  intervalul

$[a_1, c_2]$  dacă  $c_2$  este majorant pentru  $A$ , respectiv intervalul  $[c_2, b_1]$ , dacă  $c_2$  nu este majorant pentru  $A$  și așa mai departe.

Se obțin astfel două șiruri de numere raționale  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  cu următoarele proprietăți:

$$1) a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^n} = 0$$

3) pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_n$  este majorant, iar  $a_n$  nu este majorant al mulțimii  $A$ .

Din axioma lui Cantor rezultă că există  $M \in \mathbb{R}$  astfel,  $a_n \leq M \leq b_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Observăm că  $M = \sup A$ . Într-adevăr,  $M$  este majorant pentru  $A$ , pentru că în caz contrar, există  $x \in A$  astfel încât  $M < x$ . Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , există

$n_0 \in \mathbb{N}^*$  cu proprietatea  $b_{n_0} - a_{n_0} < x - M$ .

În continuare avem  $b_{n_0} < x + (a_{n_0} - M) \leq x$ , ceea ce contrazice faptul că  $b_{n_0}$  este majorant pentru  $A$ . Arătăm acum că  $M$  este cel mai mic majorant al mulțimii  $A$ . Să presupunem prin absurd că există  $M' < M$ ,  $M'$  majorant pentru  $A$ . Fie  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $b_{n_1} - a_{n_1} < M - M'$ . Mai departe avem:

$$a_{n_1} > M' + (b_{n_1} - M) \geq M'$$

de unde rezultă că  $a_{n_1}$  este majorant pentru  $A$ . Am ajuns astfel la o contradicție. În concluzie,  $M$  este cel mai mic majorant al mulțimii  $A$ , deci marginea superioară a mulțimii  $A$ . Demonstrația existenței marginii inferioare este analogă.

**Observația 1.1.3.**  $M \in \mathbb{R}$  este marginea superioară a mulțimii  $A$  dacă și numai dacă

$$1) x \leq M, \forall x \in A$$

$$2) \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A \text{ astfel încât } M - \varepsilon < x_\varepsilon.$$

Într-adevăr, dacă  $M = \sup A$ , atunci  $M$  este majorant pentru  $A$ , de unde rezultă 1). Deoarece  $M$  este cel mai mic majorant al mulțimii  $A$ , rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $M - \varepsilon$  nu este majorant pentru  $A$ , deci  $\exists x_\varepsilon > M - \varepsilon$ . Fie acum  $M \in \mathbb{R}$  cu proprietățile 1) și 2). Din 1) rezultă că  $M$  este majorant pentru  $A$ . Fie  $M' < M$  și fie  $\varepsilon = M - M' > 0$ . Din 2) rezultă că există  $x_\varepsilon \in A$  astfel încât  $x_\varepsilon > M - \varepsilon = M'$ . Prin urmare  $M'$  nu este majorant pentru  $A$  și deci  $M = \sup A$ .

## 1.2. Șiruri de numere reale (complemente)

Reamintim că un șir de numere reale  $\{a_n\}$  se numește convergent (are limită finită) dacă există  $l \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\forall n \geq n_\varepsilon$  avem  $|a_n - l| < \varepsilon$ .

**Definiția 1.2.1.** Fie  $\{a_n\}$  un șir de numere reale și  $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$  un șir strict crescător de numere naturale. Șirul  $\{a_{k_n}\}$  se numește subșir al șirului  $\{a_n\}$ . În particular șirul inițial  $\{a_n\}$  poate fi privit ca un subșir al său (cazul  $k_n = n$ ).

Dacă șirul  $\{a_n\}$  este convergent și are limita  $l$ , atunci orice subșir al său este convergent și are limita  $l$ . (Afirmția rezultă imediat din Observația  $n \leq k_n$ ).

**Lema 1.2.1. (Cesàro).** Orice șir mărginit de numere reale conține un subșir convergent.

*Demonstrație*

Fie  $\{x_n\}$  un șir de numere reale mărginit. Atunci există  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a < x_n < b, \forall n \in \mathbb{N}$ . Fie  $c$  mijlocul intervalului  $[a, b]$ . Cel puțin unul din intervalele  $[a, c], [c, b]$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $\{x_n\}$ .

Presupunem că  $[a, c]$  are această proprietate. Atunci notăm  $a_1 = a$  și  $b_1 = c$ . Fie  $c_1$  mijlocul intervalului  $[a_1, b_1]$ . Cel puțin unul din intervalele  $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $\{x_n\}$ . Să presupunem că  $[c_1, b_1]$  are această proprietate. Atunci notăm  $a_2 = c_1, b_2 = b_1$  și așa mai departe. Se obțin astfel două șiruri de numere raționale  $\{a_n\}, \{b_n\}$  cu proprietățile:

$$1) a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^n} = 0.$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N}, \text{intervalul } [a_n, b_n] \text{ conține o infinitate de termeni ai șirului } \{x_n\}.$$

Din axioma lui Cantor rezultă că există  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a_n \leq x \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Alegem  $k_1 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$ . Deoarece  $[a_2, b_2]$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $\{x_n\}$ , există  $k_2 \in \mathbb{N}^*, k_2 > k_1$  astfel încât  $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$ .

Procedând în continuare în mod asemănător rezultă că există un șir strict crescător de numere naturale

$k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$  astfel încât  $x_{k_n} \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Deoarece  $|x_{k_n} - x| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$  rezultă că  $\{x_{k_n}\}$  converge la  $x$ .

**Definiția 1.2.2.** Un șir de numere reale  $\{x_n\}$  se numește *fundamental* (Cauchy) dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\forall m, n \geq n_\varepsilon$  avem  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ .

Notând cu  $p = m - n$  (dacă  $m > n$ ), respectiv  $p = n - m$  (dacă  $m < n$ ) obținem următoarea definiție echivalentă:  $\{x_n\}$  este fundamental dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\forall n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$  avem  $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ .

**Lema 1.2.2.** Orice șir fundamental este mărginit.

*Demonstrație*

Fie  $\{x_n\}$  un șir fundamental. Pentru  $\varepsilon = 1$  există  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|x_{n+p} - x_n| < 1, \quad \forall n \geq n_1, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru  $n = n_1$  rezultă

$$|x_{n_1+p} - x_{n_1}| < 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \text{ deci}$$

$$x_{n_1} - 1 < x_{n_1+p} < x_{n_1} + 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă notăm cu

$$a = \min\{x_1, \dots, x_{n_1-1}, x_{n_1} - 1\} \text{ și cu } b = \max\{x_1, \dots, x_{n_1-1}, x_{n_1} + 1\}$$

atunci  $a \leq x_n \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 1.2.1. (Criteriul general de convergență al lui Cauchy)**

*Condiția necesară și suficientă ca un șir de numere reale să fie convergent este să fie fundamental.*

*Demonstrație*

**Necesitatea.** Fie  $\{x_n\}$  un șir convergent, având limita  $l \in \mathbb{R}$ . Pentru  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$ . Dacă  $m \geq n_\varepsilon$ , atunci  $|x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}$  și

mai departe  $|x_m - x_n| = |(x_m - l) + (l - x_n)| \leq |x_m - l| + |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Așadar,

$\forall n, m \geq n_\varepsilon$  avem  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ , deci  $\{x_n\}$  este fundamental.

**Suficiența.** Fie  $\{x_n\}$  un șir fundamental. Pentru  $\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\forall n, m \geq n'_\varepsilon$  avem:

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.3)$$

Pe de altă parte, din Lema 1.2.2. rezultă că șirul  $\{x_n\}$  este mărginit, iar din Lema 1.2.1, că admite un subșir  $x_{k_n}$  convergent. Fie  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}$  și fie  $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât:

$$|x_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \quad n \geq n'_\varepsilon. \quad (1.4)$$

Dacă  $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$  și  $n \geq n_\varepsilon$ , atunci din (1.3) și (1.4) rezultă:

$$|x_n - l| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - l| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Așadar,  $|x_n - l| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ , deci  $\{x_n\}$  este convergent și are limita  $l$ .

Criteriul general de convergență al lui Cauchy stabilește că pentru șirurile de numere reale noțiunile de șir convergent și șir fundamental sunt echivalente. Prin urmare, este suficient să verificăm pentru un șir că este fundamental (deci o condiție mai slabă) ca să tragem concluzia că este convergent.

**Exemplu:** Să se studieze convergența șirului cu termenul general  $a_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + \frac{\cos nx}{2^n}$  ( $x \in \mathbb{R}$  oarecare fixat). Verificăm că șirul  $\{a_n\}$  este fundamental. Într-adevăr avem:

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}, \quad p \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ , rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \quad n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \quad \forall \quad n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall \quad p \in \mathbb{N}^*$ . Așadar, șirul  $\{a_n\}$  este fundamental și deci convergent.

Datorită importanței deosebite pentru analiza matematică a criteriului general de convergență al lui Cauchy, prezentăm în continuare o altă demonstrație a sa, mai precis a implicației: orice șir fundamental este convergent.

Fie  $\{x_n\}$  un șir fundamental. Pentru Fie  $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$  există  $n_k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2^k}, \quad \forall \quad n, m \geq n_k. \quad (1.5)$$

În particular avem:

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{1}{2^k}, \quad n \geq n_k. \quad (1.6)$$

Pentru  $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$  există  $\bar{n}_{k+1} \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \forall \quad n, m \geq \bar{n}_{k+1}. \quad (1.7)$$

Dacă alegem  $n_{k+1} > \max(n_k, \bar{n}_{k+1})$ , atunci

$$n_{k+1} > n_k \quad \text{și} \quad |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < \frac{1}{2^k}.$$

Prin urmare dacă  $\{x_n\}$  este fundamental, există un subșir al său  $\{x_{n_k}\}$  cu proprietatea:

$$x_{n_k} - \frac{1}{2^k} < x_{n_{k+1}} < x_{n_k} + \frac{1}{2^k}, \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Dacă notăm cu  $a_k = x_{n_k} - \frac{1}{2^{k-1}}$  și  $b_k = x_{n_k} + \frac{1}{2^{k-1}}$  atunci șirurile  $\{a_k\}$  și

$\{b_k\}$  satisfac condițiile Propoziției 1.1.4. Într-adevăr, ținând seama de (1.8) avem:

$$a_{k+1} - a_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} > -\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} = 0$$

$$b_{k+1} - b_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}} = 0$$

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^{k-2}} \rightarrow 0 \quad \text{pentru } k \rightarrow \infty.$$

Prin urmare, există  $x \in Y$  astfel încât

$$x_{n_k} - \frac{1}{2^{k-1}} = a_k \leq x \leq b_k = x_{n_k} + \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Din (1.8) și (1.9) rezultă

$$|x_{n_{k+1}} - x| < \frac{3}{2^k}, \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

Așadar, subșirul  $\{x_{n_k}\}$  este convergent și are limita  $x$ . Fie  $\varepsilon > 0$  și  $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \quad k \geq n'_\varepsilon. \quad (1.11)$$

Fie  $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât



$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \quad m, n \geq n''_{\varepsilon} \quad (1.12)$$

Dacă notăm cu  $n_{\varepsilon} = \max(n'_{\varepsilon}, n''_{\varepsilon})$ , atunci din (11) și (12), pentru  $n \geq n_{\varepsilon}$  avem:

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de unde rezultă că  $\{x_n\}$  converge la  $x$ .

**Teorema 1.2.2.** *Orice șir monoton și mărginit este convergent.*

*Demonstrație*

Fie  $\{x_n\}$  un șir monoton crescător și mărginit. Deoarece mulțimea  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  este majorată, din Teorema 1.1.1. rezultă că există  $M = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ . Din Observația 1.1.2. rezultă că  $x_n \leq M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  și  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  astfel încât  $M - \varepsilon < x_{n_{\varepsilon}}$ . Deoarece șirul  $\{x_n\}$  este monoton crescător, rezultă  $x_n \geq x_{n_{\varepsilon}}$ ,  $\forall n \geq n_{\varepsilon}$ .

Prin urmare, pentru orice  $n \geq n_{\varepsilon}$  avem:

$$M - \varepsilon < x_n \leq M \leq M + \varepsilon, \text{ adică } |x_n - M| < \varepsilon, \quad (1.13)$$

de unde rezultă că  $\{x_n\}$  este convergent și are limita  $M$ .

Cel mai cunoscut exemplu de aplicație a Teoremei 1.2.2. este șirul  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Se știe din liceu că acest șir este monoton crescător și mărginit

( $2 \leq a_n < 3$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ). Limita sa se notează cu  $e$ . Deci  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Despre numărul  $e$  se poate arăta că este irațional și valoarea sa este aproximativ egală cu  $e \approx 2,71828$ .

În continuare prezentăm o altă aplicație interesantă a Teoremei 1.1.1.

**Exemplu.** Fie șirul cu termenul general

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Vom arăta că acest șir este monoton descrescător și mărginit. Pentru aceasta folosim următoarea inegalitate cunoscută din liceu

$$\ln(1+x) < x, \quad \forall x > -1, x \neq 0. \quad (1.14)$$

Într-adevăr,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Așadar  $a_{n+1} < a_n$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Pe de altă parte, deoarece  $\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n}$ , vom avea:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \\ &= \ln \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n+1}{n} - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0 \Rightarrow a_n > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Rezultă că șirul  $\{a_n\}$  este convergent. Limita sa se notează cu  $C$  și se numește constanta lui Euler și este aproximativ egală cu 0,5772156.

Dacă notăm cu  $\varepsilon_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) - C$ , atunci  $\{\varepsilon_n\}$  este un șir de numere pozitive, descrescător, cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ . Rezultă următoarea identitate:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad (1.15)$$

care se dovedește utilă în aplicații și va fi folosită mai departe.

### 1.3. Dreapta încheiată. Limitele extreme ale unui șir

Reamintim că prin dreapta încheiată se înțelege mulțimea  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$ .

Pe mulțimea  $\bar{\mathbb{R}}$  se consideră relația de ordine obținută prin prelungirea relației de ordine de pe  $\mathbb{R}$  astfel:

$$-\infty < \infty, \quad -\infty < x \text{ și } x < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

În felul acesta  $\bar{\mathbb{R}}$  este o mulțime ordonată.

Dacă  $A \subset \mathbb{R}$  este o mulțime nevidă care nu este majorată, definim  $\sup A = +\infty$ . În mod analog, dacă  $A$  nu este minorată definim  $\inf A = -\infty$ . Cu această convenție, orice mulțime de numere reale este mărginită în  $\bar{\mathbb{R}}$ . Operațiile algebrice de pe  $\mathbb{R}$  se extind pe  $\bar{\mathbb{R}}$ , fără însă să fie peste tot definite și anume:

$$\begin{aligned} \infty + x &= \infty, \quad \forall x \in \bar{\mathbb{R}}, \quad x \neq -\infty \\ -\infty + x &= -\infty, \quad \forall x \in \bar{\mathbb{R}}, \quad x \neq \infty \\ \infty x &= \begin{cases} \infty & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty & \text{dacă } x < 0 \end{cases}, \quad x \in \bar{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

**Definiția 1.3.1.** Un șir de numere reale  $\{x_n\}$  are limita  $\infty$  (respectiv  $-\infty$ ) dacă  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $x_n > \varepsilon$  (respectiv  $x_n < \varepsilon$ ),  $\forall n \geq n_\varepsilon$ .

Se folosesc notațiile:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  (respectiv  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ).

**Propoziția 1.3.1.** Orice șir monoton de numere reale are limită în  $\bar{\mathbb{R}}$ . Orice șir de numere reale conține un subșir care are limită în  $\bar{\mathbb{R}}$ .

*Demonstrație*

Fie  $\{x_n\}$  un șir monoton crescător de numere reale. Dacă  $\{x_n\}$  este mărginit superior, atunci  $\{x_n\}$  este convergent, deci are limită finită. (Teorema 1.2.2.) Dacă  $\{x_n\}$  nu este mărginit superior, atunci pentru  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$ . Cum  $\{x_n\}$  este crescător vom avea  $x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . Dacă  $\{x_n\}$  este descrescător se procedează în mod analog.

Fie acum  $\{x_n\}$  un șir de numere reale oarecare. Dacă  $\{x_n\}$  este mărginit, atunci din Lema Cesàro rezultă că există un subșir  $\{x_{n_k}\}$  convergent. Să presupunem că  $\{x_n\}$  nu este mărginit (de exemplu nu este mărginit superior). Vom arăta în acest caz că există un subșir care are limita  $+\infty$ . Într-adevăr, există o infinitate de termeni ai șirului mai mari ca 1. Fie  $x_{k_1} > 1$ . De asemenea, există o infinitate de termeni ai șirului mai mari ca 2. Atunci putem alege  $k_2 > k_1$  astfel încât  $x_{k_2} > 2$ . Construim astfel prin inducție un șir strict crescător de numere naturale  $\{k_n\}$  cu proprietatea  $x_{k_n} > n$ . Rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = \infty$ .

**Definiția 1.3.2.** Fie  $\{x_n\}$  un șir de numere reale și  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ . Spunem că  $a$  este punct limită pentru șirul  $\{x_n\}$  dacă există un subșir  $\{x_{k_n}\}$  astfel încât  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}$ .

**Observația 1.3.1.** Dacă un șir are limită, atunci acest șir are un singur punct limită care coincide cu limita sa.

**Exemple**

- 1) Șirul  $x_n = (-1)^n$  are două puncte limită  $-1$  și  $1$ .
- 2) Șirul  $x_n = n^{(-1)^n}$  are două puncte limită  $0$  și  $\infty$ .
- 3) Șirul  $x_n = n$  are un singur punct limită  $\infty$ .
- 4) Șirul  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$  are un singur punct limită  $0$ .

**Teorema 1.3.1.** Pentru orice șir de numere reale  $\{x_n\}$  există un cel mai mic punct limită (finit sau nu) și un cel mai mare punct limită (finit sau nu).

*Demonstrație*

Dacă  $\{x_n\}$  nu este majorat, atunci din Propoziția 1.3.1. rezultă că există un subșir care are limita  $+\infty$ . Așadar,  $+\infty$  este punct limită și evident este cel mai mare.

Să presupunem acum că șirul  $\{x_n\}$  este majorat și să notăm cu  $A$  mulțimea punctelor sale limită finite. Dacă  $A$  este vidă, atunci din Lema Cesàro rezultă că  $\{x_n\}$  nu este mărginit inferior. În această situație  $-\infty$  este singurul punct limită și deci și cel mai mare. Să presupunem acum  $A \neq \emptyset$ . Cum  $\{x_n\}$  este majorat, rezultă că și  $A$  este majorată, deci există  $\sup A \in \mathbb{Y}$  (Teorema 1.1.1.). Să observăm însă că  $\alpha = \sup A \in A$ . Într-adevăr, din definiția marginii superioare rezultă că  $\forall p \in \mathbb{Q}^*$  există  $a_p \in A$  astfel încât  $\alpha - \frac{1}{p} < a_p \leq \alpha$ .

Pe de altă parte, pentru  $a_p$  există un subșir al șirului  $\{x_n\}$  convergent la  $a_p$ . Așadar, pentru  $a_1$  există  $x_{k_1}$  astfel încât  $|x_{k_1} - a_1| < 1$ . Pentru  $a_2$  există  $x_{k_2}$ ,  $k_2 > k_1$  astfel încât  $|x_{k_2} - a_2| < \frac{1}{2}$ .

Prin inducție construim un șir de numere naturale  $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$  cu proprietatea  $|x_{k_p} - a_p| < \frac{1}{p}$ . Din inegalitatea

$$|x_{k_p} - \alpha| \leq |x_{k_p} - a_p| + |a_p - \alpha| < \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$$

rezultă  $x_{k_p} \rightarrow \alpha$ . Așadar,  $\alpha = \sup A$  este punct limită al șirului  $\{x_n\}$  și evident, este cel mai mare. Existența celui mai mic punct limită se dovedește în mod asemănător.

**Definiția 1.3.3.** Cel mai mic punct limită al unui șir se numește limita inferioară a șirului și se notează cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n$  sau  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Cel mai mare punct limită al șirului se numește limita superioară a șirului și se notează cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n$  sau  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Observația 1.3.2.** Din Teorema 1.3.1 rezultă că orice șir de numere reale are limită superioară și limită inferioară (deși poate să nu aibă limită). Fie  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n$  și  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n$ . Limita superioară  $L$ , când este finită, este caracterizată de proprietățile:

- Pentru orice  $a < L$  există o infinitate de termeni ai șirului mai mari ca  $a$ .
- Pentru orice  $b > L$  există un număr finit de termeni ai șirului mai mari ca  $b$ .

În mod analog, limita inferioară  $l$ , când este finită, este caracterizată de proprietățile:

a) Pentru orice  $a < l$  există un număr finit de termeni ai șirului mai mici ca  $a$ .

b) Pentru orice  $b > l$  există o infinitate de termeni ai șirului mai mici ca  $b$ .

Într-adevăr, să justificăm afirmația în cazul limitei superioare  $L$ . Din a) și b) rezultă că  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  există o infinitate de termeni ai șirului în intervalul  $\left(L - \frac{1}{n}, L + \frac{1}{n}\right)$ . Se poate construi prin inducție un șir strict crescător de numere naturale  $\{k_n\}$  astfel încât  $x_{k_n} \in \left(L - \frac{1}{n}, L + \frac{1}{n}\right)$ . Rezultă  $|x_{k_n} - L| < \frac{2}{n}$  și deci  $x_{k_n} \rightarrow L$ . Așadar,  $L$  este punct limită al șirului. Din proprietatea b) rezultă că  $L$  este cel mai mare punct limită al șirului.

Am făcut mai înainte observația că orice mulțime de numere reale este mărginită în  $\bar{\mathbb{R}}$ . În particular, orice șir de numere reale, este mărginit în  $\bar{\mathbb{R}}$ . Fie  $m = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  și  $M = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ . Următoarele inegalități sunt evidente:

$$-\infty \leq m \leq l \leq L \leq M \leq +\infty.$$

**Exemplu.** Fie șirul  $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$ . Observăm că

$$x_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ \frac{1}{n} + 1 & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

Așadar, șirul conține două subșiruri convergente care au limitele 0, respectiv 1. Rezultă că  $l = 0$  și  $L = 1$ .

Subșirul  $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$  este crescător, deci  $-1$  este cel mai mic termen al său, iar

subșirul  $\left\{\frac{1}{n} + 1\right\}$  este descrescător, deci cel mai mare termen al său este 2. Rezultă  $m = -1$ ,  $M = 2$ .

Așadar, avem:  $m = -1 < l = 0 < L = 1 < M = 2$ .

**Propoziția 1.3.2.** Condiția necesară și suficientă ca un șir să aibă limită (finită sau nu) este ca  $L = \limsup a_n = \liminf a_n = l$ .

*Demonstrație*

**Necesitatea.** Dacă șirul are limită, atunci șirul are un singur punct limită, care coincide cu limita sa. Rezultă  $L = l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Suficiența.** Să presupunem că  $L = l = a \in \mathbb{R}$ . Din Observația 1.3.2. rezultă  $\forall \varepsilon > 0$ , în intervalul  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  se află o infinitate de termeni ai șirului, iar în afara acestui interval, se află un număr finit de termeni ai șirului. Rezultă  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Dacă  $L = l = a = +\infty$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , iar dacă  $L = l = a = -\infty$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

## 1.4. Serii numerice convergente și divergente

Fie  $\{u_n\}$  un șir de numere reale. Asociem acestui șir următorul șir:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

**Definiția 1.4.1.** Perechea  $(\{u_n\}, \{s_n\})$  se numește serie definită de șirul  $\{u_n\}$  și se notează cu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ sau } u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.16)$$

Elementele șirului  $\{u_n\}$  se numesc termenii seriei, iar șirul  $\{s_n\}$  se numește șirul sumelor parțiale. Seria (1.16) se numește convergentă dacă șirul sumelor parțiale  $\{s_n\}$  este convergent; limita  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  se numește suma seriei și se obișnuiește să se scrie:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1.17)$$

Dacă șirul sumelor parțiale  $\{s_n\}$  este divergent (nu are limită sau are limită infinită) spunem că seria (1.17) este divergentă.

### Exemple

#### 1. Seria geometrică

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

Suma parțială  $s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1-q^n}{1-q}$  pentru  $q \neq 1$ .

Dacă  $|q| < 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  și deci există  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ . Prin urmare,

dacă  $|q| < 1$  seria geometrică este convergentă și suma sa este  $s = \frac{a}{1-q}$ .

Dacă  $q = 1$ , atunci  $s_n = n \cdot a$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty$ .

Dacă  $q = -1$ , atunci  $s_n = \begin{cases} a & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 0 & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$

Șirul  $\{s_n\}$  nu are limită în acest caz.

Dacă  $q > 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$  și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty$ .

Dacă  $q < -1$ , atunci șirul  $\{q^n\}$  nu are limită și deci șirul  $\{s_n\}$  nu are limită.

În concluzie, pentru  $|q| \geq 1$  seria geometrică este divergentă.

## 2. Seria armonică

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Suma parțială  $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$  unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  (vezi subcap. 1.2, formula (1.15)). Rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ , deci seria armonică este divergentă.

**Propoziția 1.4.1.** Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

### Demonstrație

Fie  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . Deoarece  $u_n = s_n - s_{n-1}$ , rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = s - s = 0$ .

Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există serii divergente cu proprietatea  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  (de exemplu seria armonică).

Din Propoziția 1.4.1 rezultă următoarea observație utilă în aplicații:

**Observația 1.4.1.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este divergentă.

**Exemplu:** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2 + e^{3n})}{\ln(3 + e^{2n})}$  este divergentă, deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{3n} (1 + 2e^{-3n})}{\ln e^{2n} (1 + 3e^{-2n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \ln(1 + 2e^{-3n})}{2n + \ln(1 + 3e^{-2n})} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

**Teorema 1.4.1. (Criteriul general de convergență al lui Cauchy)**

Condiția necesară și suficientă ca seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  să fie convergentă este ca pentru  $\forall \varepsilon > 0$  să existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât pentru  $\forall n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$  să avem  $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$ .

*Demonstrație*

Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale  $\{s_n\}$  este convergent. Din Teorema 1.2.1 rezultă că  $\{s_n\}$  este convergent dacă și numai dacă  $\{s_n\}$  este fundamental, deci dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ .

**Observația 1.4.2.** Natura unei serii nu se schimbă, dacă schimbăm valorile unui număr finit de termeni ai săi (în particular, dacă îi ștergăm).

Într-adevăr, dacă  $\{s_n\}$  este șirul sumelor parțiale al seriei inițiale, atunci șirul sumelor parțiale ale noii serii, este de forma  $\{s_n + c\}$  (începând de la un anumit rang), unde  $c$  este un număr constant.

## 1.5. Serii cu termeni pozitivi

Seriile cu termeni pozitivi sunt seriile în care toți termenii sunt strict pozitivi ( $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ). Locul special pe care îl ocupă aceste serii printre seriile numerice este pus în evidență de următoarea teoremă:



**Teorema 1.5.1.** *Condiția necesară și suficientă ca o serie de termeni pozitivi să fie convergentă este ca șirul sumelor parțiale să fie mărginit.*

*Demonstrație*

Dacă seria este convergentă, atunci șirul sumelor parțiale este convergent și deci mărginit.

Condiția este și suficientă, pentru că șirul sumelor parțiale al unei serii cu termeni pozitivi este monoton crescător și dacă este în plus și mărginit, rezultă că este convergent (Teorema 1.2.1.).

**Teorema 1.5.2. (Criteriul I de comparație)**

Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  două serii cu termeni pozitivi. Presupunem că există

$k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$u_n \leq v_n, \quad \forall \quad n \geq k \quad (1.18)$$

Atunci: a) Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  converge, rezultă că și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge.

b) Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge, rezultă că și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  diverge.

*Demonstrație*

Din Observația 1.4.2 rezultă că, suprimând eventual primii  $k - 1$  termeni din cele două serii, putem presupune că  $u_n \leq v_n, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}^*$ . Dacă notăm cu  $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  și cu  $\sigma_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ , atunci din (1.18) rezultă  $s_n \leq \sigma_n, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}^*$ .

Dacă  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  este convergentă, atunci  $\{\sigma_n\}$  este mărginit deci și  $\{s_n\}$  va fi

mărginit. Din Teorema 1.5.1 rezultă că  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

b) Dacă  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este divergentă, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$  și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$ .

Rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  este divergentă.

**Observația 1.5.1.** În enunțul teoremei precedente inegalitatea (1.18) poate fi înlocuită cu inegalitatea

$$u_n \leq c \cdot v_n, \quad \forall n \geq k, \quad (1.18')$$

unde  $c$  este un număr constant strict pozitiv.

Într-adevăr, natura seriilor  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot v_n)$  este evident aceeași.

### **Teorema 1.5.3. (Criteriul de condensare al lui Cauchy)**

Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că șirul  $\{u_n\}$  este

descrescător. Atunci seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$  au aceeași natură.

*Demonstrație*

Fie  $k \in \mathbb{N}^*$  cu proprietatea  $n < 2^k$ .

Deoarece  $\{u_n\}$  este un șir descrescător de numere pozitive avem:

$$\begin{aligned} s_n = u_1 + \dots + u_n &\leq u_1 + \dots + u_{2^k-1} = u_1 + (u_2 + u_3) + \dots + (u_{2^{k-1}} + \dots + u_{2^k-1}) \leq \\ &\leq u_1 + 2u_2 + \dots + 2^{k-1}u_{2^{k-1}} = u_1 + \sigma_{2^k-1} \end{aligned}$$

(cu  $\sigma_n$  notăm șirul sumelor parțiale al seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$ ).

Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$  este convergentă și are suma  $\sigma$ , rezultă  $s_n < u_1 + \sigma$ ,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$  și deci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

Pe de altă parte, dacă  $n \geq 2^k$  vom avea:

$$\begin{aligned} s_n = u_1 + \dots + u_n &\geq u_1 + \dots + u_{2^k} = u_1 + u_2 + (u_3 + u_4) + \dots + (u_{2^{k-1}} + \dots + u_{2^k}) \geq \\ &\geq \frac{1}{2}u_1 + u_2 + 2u_4 + \dots + 2^{k-1}u_{2^k} = \frac{1}{2}(u_1 + 2u_2 + 2^2u_{2^2} + \dots + 2^k u_{2^k}) = \\ &= \frac{1}{2}(u_1 + \sigma_{2^k}). \end{aligned}$$

Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$  diverge, rezultă  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{2^k} = \infty$  și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ .

Așadar, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este divergentă.

### Exemple

#### 1. Seria armonică generalizată

Considerăm seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , numită seria armonică generalizată.

Deoarece  $\alpha > 0$ , termenii seriei descresc și se poate aplica Teorema 1.5.3.

Rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  are aceeași natură cu seria  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)}$ , care este o serie geometrică, cu rația  $q = 2^{1-\alpha}$ .

Dacă  $\alpha \leq 1$ , atunci  $q \geq 1$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  diverge.

Dacă  $\alpha > 1$ , atunci  $q < 1$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  converge.

În particular, pentru  $\alpha = 1$  obținem o nouă demonstrație a faptului că seria armonică  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă.

**2. Seria**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_a n)^\alpha}$ , unde  $a > 1$  este convergentă pentru  $\alpha > 1$  și

divergentă pentru  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Într-adevăr, din Teorema 1.5.3 rezultă că această serie are aceeași natură cu seria

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (\log_a 2^n)^\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \cdot \log_a 2)^\alpha} = \frac{1}{(\log_a 2)^\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Așadar, seria dată are aceeași natură cu seria armonică generalizată.

#### Teorema 1.5.4. (Criteriul II de comparație)

Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  două serii cu termeni pozitivi. Presupunem că există

$k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \quad \forall \quad n \geq k. \quad (1.19)$$

Atunci: a) Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  converge, rezultă că și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge.

b) Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge, rezultă că și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  diverge.

*Demonstrație*

Din Observația 1.4.2 rezultă că putem presupune că inegalitatea (1.19) are loc pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Așadar avem  $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  și mai departe

$$\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{u_2}{v_2} \leq \frac{u_1}{v_1}, \text{ de unde rezultă } u_n \leq \frac{u_1}{v_1} \cdot v_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Afirmațiile din enunț rezultă acum din Teorema 1.5.2 (Observația 1.5.1).

### **Teorema 1.5.5. (Criteriul III de comparație)**

Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  două serii cu termeni pozitivi cu proprietatea:

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty. \quad (1.20)$$

Atunci cele două serii au aceeași natură.

*Demonstrație*

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$0 < a < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} < b.$$

Din Observația 1.3.2 rezultă că numai un număr finit de termeni ai șirului  $\left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\}$  sunt mai mici ca  $a$  sau mai mari ca  $b$ . Prin urmare există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$a < \frac{u_n}{v_n} < b, \text{ pentru orice } n \geq k. \quad (1.21)$$

Cum  $v_n > 0$ , mai departe avem:

$$av_n < u_n < bv_n.$$

Afirmația rezultă acum din Teorema 1.5.2.

**Corolar.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  două serii cu termeni pozitivi cu proprietatea

că există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$  și

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty. \quad (1.22)$$

Atunci cele două serii au aceeași natură.

*Demonstrație*

Afirmația rezultă din Teorema 1.5.5 și Propoziția 1.3.2.

**Exemplu.** Să se afle natura seriei  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$ . Fie  $u_n = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$  și  $v_n = \frac{1}{n}$ .

Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ . Cum seria  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă,

rezultă că și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$  este divergentă.

### **Teorema 1.5.6. (Criteriul rădăcinii al lui Cauchy)**

Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există  $0 < \alpha < 1$  și  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} \leq \alpha, \quad \forall \quad n \geq k, \quad (1.23)$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

b) Dacă pentru o infinitate de termeni avem

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \quad (1.24)$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este divergentă.

*Demonstrație*

Din (1.23) rezultă  $u_n \leq \alpha^n$ ,  $\forall n \geq k$ . Deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n$  este convergentă, fiind o serie geometrică cu rația  $q = \alpha < 1$ , din Teorema 1.5.2 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

Din (1.24) rezultă  $u_n \geq 1$  pentru o infinitate de termeni și deci că șirul  $\{u_n\}$  nu converge la 0. Din Observația 1.4.1 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este divergentă.

**Corolarul 1.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi și fie  $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{u_n}$ . Dacă  $L < 1$  seria este convergentă, iar dacă  $L > 1$  seria este divergentă.

*Demonstrație*

a) Fie  $L < \alpha < 1$ . Din definiția limitei superioare rezultă că există un număr finit de termeni ai șirului  $\sqrt[n]{u_n}$  mai mari ca  $\alpha$ . Așadar există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\sqrt[n]{u_n} \leq \alpha$ ,  $\forall n \geq k$ . Afirmatia rezultă acum din Teorema 1.5.6.

b) Dacă  $L > 1$ , atunci există o infinitate de termeni ai șirului  $\{\sqrt[n]{u_n}\}$  mai mari ca 1, deci seria este divergentă (vezi Teorema 1.5.6).

**Corolarul 2.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$ . Dacă  $l < 1$  seria este convergentă, iar dacă  $l > 1$  seria este divergentă.

*Demonstrație*

Afirmatia rezultă din Corolarul 1 și Propoziția 1.3.2.

### Exemple

1. Să se afle natura seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} [2 + (-1)^n]^n \cdot a^n$ ,  $a > 0$ . Dacă notăm cu  $u_n = [2 + (-1)^n]^n \cdot a^n$ , atunci  $\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} = \overline{\lim} [2 + (-1)^n] \cdot a = 3a$ . Prin urmare,

din Corolarul 2 rezultă că dacă  $a < \frac{1}{3}$  seria este convergentă, iar dacă  $a > \frac{1}{3}$  seria este divergentă.

$$\text{Dacă } a = \frac{1}{3} \text{ atunci } u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 1 & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

Seria este divergentă deoarece  $u_n \not\rightarrow 0$ .

2. Să se afle natura seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}$ . Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$  rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Din Corolarul 1 rezultă că seria este convergentă.

**Teorema 1.5.7. (Criteriul raportului al lui D'Alembert)**

Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există  $0 < \alpha < 1$  și  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha, \quad \forall \quad n \geq k, \quad (1.25)$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

b) Dacă există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \quad \forall \quad n \geq k, \quad (1.26)$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este divergentă.

*Demonstrație*

Suprimând eventual un număr finit de termeni ai seriei, putem presupune că inegalitatea (1.25) are loc pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Așadar, avem:

$$u_{n+1} \leq \alpha \cdot u_n, \quad \forall \quad n \geq 1 \quad (1.25')$$

Dând succesiv lui  $n$  valorile 1, 2, 3, ... din (1.25') rezultă

$$u_n \leq \alpha^{n-1} u_1, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} u_1$  este convergentă, fiind o serie geometrică cu rația

$q = \alpha < 1$ , din Teorema 1.5.2 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

Din (1.26) rezultă  $0 < u_n \leq u_{n+1}$ ,  $\forall n \geq k$ . Așadar, în acest caz, șirul  $\{u_n\}$  este crescător (începând de la un anumit rang) și deci termenul său general nu converge la 0. Din Observația 1.4.1 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este divergentă.

**Corolarul 1.** O serie cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă dacă

$$\overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ și divergentă dacă } \underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

*Demonstrație*

Fie  $L = \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  și  $L < \alpha < 1$ . Din definiția limitei superioare rezultă că

numai un număr finit de termeni ai șirului  $\left\{ \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}$  sunt mai mari ca  $\alpha$ . Așadar, există

$k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha < 1$ ,  $\forall n \geq k$ . Din Teorema 1.5.7 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

Fie  $l = \underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ . Din definiția limitei inferioare rezultă că numai un număr

finit de termeni ai șirului  $\left\{ \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}$  sunt mai mici ca 1. Așadar, există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel

încât  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ,  $\forall n \geq k$ . Din Teorema 1.5.7 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este divergentă.

**Corolarul 2.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Dacă  $l < 1$  seria este convergentă, iar dacă  $l > 1$  seria este divergentă.

*Demonstrație*



Afirmația rezultă din Corolarul 1 și Propoziția 1.3.2.

**Exemplu.** Să se afle natura seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ ,  $a > 0$ . Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$ , rezultă că seria este convergentă,  $\forall a > 0$ .

**Teorema 1.5.8. (Criteriul Raabe-Duhamel)**

Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există  $\alpha > 1$  și  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq \alpha, \quad \forall n \geq k, \quad (1.27)$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge.

b) Dacă există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad \forall n \geq k, \quad (1.28)$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge.

*Demonstrație*

a) Suprimând eventual un număr finit de termeni ai seriei, putem presupune că inegalitatea (1.27) are loc pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , așadar avem

$$nu_n - nu_{n+1} \geq \alpha u_{n+1}, \quad \forall n \geq 1 \quad (1.27')$$

Dând lui  $n$  succesiv valoarea 1, 2, 3, ... în (1.27') rezultă:

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &\geq \alpha u_2 \\ 2u_2 - 2u_3 &\geq \alpha u_3 \\ 3u_3 - 3u_4 &\geq \alpha u_4 \\ &\dots\dots\dots \\ nu_n - nu_{n+1} &\geq \alpha u_{n+1} \end{aligned}$$

Notând cu  $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  și adunând inegalitățile de mai sus obținem:

$$s_n \geq \alpha(s_n - u_1 + u_{n+1}) > \alpha(s_n - u_1)$$

și mai departe  $s_n \leq \frac{\alpha u_1}{\alpha - 1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Așadar, șirul sumelor parțiale este mărginit. Din Teorema 1.5.1 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

b) Din inegalitatea (1.28) rezultă

$$nu_n \leq (n+1)u_{n+1} \text{ și mai departe } \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \forall \quad n \geq k.$$

Deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă, din Teorema 1.5.4 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este divergentă.

**Corolarul 1.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă  $l = \underline{\lim} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > 1$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

b) Dacă  $L = \overline{\lim} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < 1$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  divergentă.

*Demonstrație*

a) Fie  $l > \alpha > 1$ . Din definiția limitei inferioare rezultă că există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât:  $n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq \alpha, \quad \forall \quad n \geq k$ . Afirmația rezultă acum din Teorema 1.5.8.

b) Fie  $L < 1$ . Din definiția limitei superioare rezultă că există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât:  $n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad \forall \quad n \geq k$ . Afirmația rezultă din Teorema 1.5.8.

**Corolarul 2.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = l$ . Dacă  $l > 1$  seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge, iar dacă  $l < 1$  seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge.

*Demonstrație*

Afirmația rezultă din Corolarul 1 și Propoziția 1.3.2.

**Exemplu:** Să se afle natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Dacă notăm cu  $u_n$  termenul general al seriei, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1.$$

Din Corolarul 2 rezultă că seria este convergentă.

**Teorema 1.5.9. (Criteriul logaritmice al lui Cauchy)**

Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există  $\alpha > 1$  și  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât:

$$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \geq \alpha, \quad \forall \quad n > k, \quad (1.29)$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

b) Dacă există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât:

$$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \leq 1, \quad \forall \quad n \geq k, \quad (1.30)$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este divergentă.

*Demonstrație*

a) Din (1.29) rezultă  $\ln \frac{1}{u_n} \geq \alpha \ln n = \ln n^\alpha$ . Deoarece funcția  $f = \ln$  este

crescătoare, rezultă  $\frac{1}{u_n} \geq n^\alpha$  și mai departe  $u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}, \forall \quad n \geq k$ .

Cum seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  este convergentă pentru  $\alpha > 1$ , din Teorema 1.5.2 rezultă

că și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

b) Din (1.30) rezultă  $u_n \geq \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \geq k$ . Cum seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă, din

Teorema 1.5.2 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este divergentă.

**Corolarul 1.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} > 1$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge.

b) Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} < 1$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge.

Demonstrația rezultă din Teorema 1.5.9 și este asemănătoare cu demonstrația de la Corolarul 1, Teorema 1.5.8.

**Corolarul 2.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie cu termeni pozitivi pentru care există

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n}$ . Dacă  $l > 1$  seria este convergentă, iar dacă  $l < 1$  seria este divergentă.

Demonstrația rezultă din Corolarul 1 și Propoziția 1.3.2.

**Exemplu:** Să se afle natura seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$ ,  $a > 0$ .

Dacă notăm cu  $u_n = n^{\ln a}$ , atunci

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = -\ln a.$$

Dacă  $a < \frac{1}{e}$  rezultă  $l > 1$ , deci seria este convergentă.

Dacă  $a > \frac{1}{e}$  seria este divergentă.

Dacă  $a = \frac{1}{e}$  atunci  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  coincide cu seria armonică  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  și deci este divergentă.

## 1.6. Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

Vom considera acum serii de numere reale, în care termenii pot avea orice semn. Cazul interesant este acela al seriilor care au o infinitate de termeni pozitivi și o infinitate de termeni negativi (O serie care are numai un număr finit de termeni de același semn poate fi asimilată cu o serie cu termeni pozitivi).

Pentru astfel de serii avem deja un criteriu de convergență și anume, criteriul general de convergență al lui Cauchy (Teorema 1.4.1).

În continuare vom prezenta un criteriu care ne dă o condiție suficientă pentru convergența unei serii cu termeni oarecare.

### Teorema 1.6.1. (Criteriul Abel-Dirichlet)

Fie  $\{a_n\}$  un șir descrescător de numere pozitive convergent la 0 și fie seria

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  cu proprietatea că șirul sumelor sale parțiale  $\{s_n\}$  este mărginit. Atunci

seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$  este convergentă.

#### Demonstrație

Demonstrația se bazează pe Teorema 1.4.1 (criteriul general de convergență al lui Cauchy).

Prin ipoteză, există  $M > 0$ , astfel încât

$$|s_n| < M, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Observăm că, deoarece șirul  $\{a_n\}$  este descrescător, avem

$$|a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}, \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă notăm cu  $\{\sigma_n\}$  șirul numerelor parțiale ale seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ , atunci:

$$\begin{aligned} |\sigma_{n+p} - \sigma_n| &= |a_{n+1}v_{n+1} + a_{n+2}v_{n+2} + \dots + a_{n+p}v_{n+p}| = \\ &= |a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + a_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \dots + a_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1})| = \\ &= |-a_{n+1}s_n + (a_{n+1} - a_{n+2})s_{n+1} + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})s_{n+p-1} + a_{n+p}s_{n+p}| \leq \\ &\leq a_{n+1}|s_n| + (a_{n+1} - a_{n+2})|s_{n+1}| + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})|s_{n+p-1}| + a_{n+p}|s_{n+p}| \leq \\ &\leq M(a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + \dots + a_{n+p-1} - a_{n+p} + a_{n+p}) = 2M a_{n+1}. \end{aligned}$$

Așadar, pentru orice  $n$  și  $p \in \mathbb{N}^*$  avem:

$$|\sigma_{n+p} - \sigma_n| \leq 2M a_{n+1}. \quad (1.31)$$

Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , pentru  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $a_n < \frac{\varepsilon}{2M}$ ,  $\forall n \geq n_\varepsilon$ .

Dacă în inegalitatea (1) considerăm  $n \geq n_\varepsilon$  obținem

$$|\sigma_{n+p} - \sigma_n| \leq 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Din Teorema 1.4.1 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$  este convergentă.

**Exemplu:** Să se afle natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n^2}{n}.$$

Deoarece

$$\sin n \cos n^2 = \frac{1}{2} [\sin n(n+1) - \sin n(n-1)],$$

seria dată se mai poate scrie sub forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} [\sin n(n+1) - \sin n(n-1)].$$

Fie  $a_n = \frac{1}{2n}$  și  $v_n = \sin n(n+1) - \sin n(n-1)$ . Se observă imediat că

$$s_n = \sum_{k=1}^n v_k = \sin n(n+1) \text{ și deci } |s_n| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Din Teorema 1.6.1 rezultă că seria este convergentă.

Următorul criteriu de convergență se referă la serii alternate. Prin serie alternată se înțelege o serie în care termenii sunt alternativ strict pozitivi sau strict negativi. O serie alternată este deci de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots, \text{ unde } u_n > 0, n \in \mathbb{N}^*.$$

### **Teorema 1.6.2. (Criteriul lui Leibniz)**

Orice serie alternată  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  cu proprietatea că șirul  $\{u_n\}$  este descrescător și convergent la 0 este convergentă.

*Demonstrație*

Demonstrația rezultă imediat din Teorema 1.6.1 dacă vom considera  $a_n = u_n$  și  $v_n = (-1)^{n-1}$ .

Într-adevăr  $a_n \geq 0$  și  $s_n = \sum_{k=1}^n v_k = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 0 & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$ .

**Exemplu.** Seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots,$$

este convergentă deoarece  $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

## 1.7. Calculul aproximativ al sumei unor serii

Calculul exact al sumei unei serii convergente este posibil numai în cazuri foarte particulare (de exemplu pentru seria geometrică). În general, acest lucru nu este posibil și de aceea se aproximează suma  $s$  a seriei, cu suma parțială  $s_n$ . Eroarea absolută care se face este  $|r_n| = |s - s_n|$ .

### 1. Cazul seriilor cu termeni pozitivi

Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este cu termeni pozitivi, atunci  $u_n > 0$  și valoarea aproximativă  $s_n$  va fi mai mică decât valoarea exactă  $s$ .

a) Să presupunem că există  $m \in \mathbb{N}^*$  și  $0 < \alpha(m) < 1$  astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha(m), \quad \forall \quad n \geq m. \quad (1.32)$$

Atunci avem

$$r_m \leq \frac{\alpha(m)}{1 - \alpha(m)} u_m. \quad (1.33)$$

Într-adevăr, din (1.32) rezultă:

$$r_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots \leq [\alpha(m) + \alpha^2(m) + \dots] u_m = \frac{\alpha(m)}{1 - \alpha(m)} u_m.$$

**Exemplu:** Să se calculeze cu trei zecimale exacte suma seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n}$ .

Deoarece  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{m+1}$  pentru  $n \geq m$ , putem lua  $\alpha(m) = \frac{1}{m+1}$

și vom pune condiția ca  $\frac{\alpha(m)}{1-\alpha(m)} u_m = \frac{1}{m!m^2} < 10^{-3}$ , de unde rezultă  $m \geq 5$ . Vom aproxima deci suma seriei cu

$$s_5 = 1 + \frac{1}{2!2} + \frac{1}{3!3} + \frac{1}{4!4} + \frac{1}{5!5} \approx 1,3176.$$

b) Presupunem că există  $m \in \mathbb{N}^*$  și  $0 < \alpha(m) < 1$  astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} \leq \alpha(m) < 1, \quad \forall \quad n \geq m. \quad (1.34)$$

Atunci avem

$$r_m \leq \frac{\alpha^{m+1}(m)}{1-\alpha(m)}. \quad (1.35)$$

Într-adevăr, din (1.34) rezultă

$$r_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots \leq \alpha^{m+1}(m) + \alpha^{m+2}(m) + \dots = \frac{\alpha^{m+1}(m)}{1-\alpha(m)}.$$

**Exemplu.** Să se calculeze cu două zecimale exacte suma seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ .

Deoarece  $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$  pentru  $n \geq m$ , putem lua  $\alpha = \alpha(m) = \frac{1}{m}$  și punem condiția

$$\frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} = \frac{1}{m^m(m-1)} < 10^{-2},$$

de unde rezultă  $m \geq 4$ . Vom aproxima deci suma seriei cu

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} \approx 1,290.$$

## 2. Cazul seriilor alternate

Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  o serie alternată care îndeplinește condițiile din criteriul

lui Leibniz ( $u_n \searrow 0$ ). Vom arăta că eroarea absolută  $|r_n| = |s - s_n| < u_{n+1}$ .



Într-adevăr, deoarece  $\{u_n\}$  este descrescător, rezultă:

$$\begin{aligned}s_{2n} &= s_{2n-2} + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq s_{2n-2} \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} - (u_{2n} - u_{2n+1}) \leq s_{2n-1}.\end{aligned}$$

Dacă notăm cu  $s$  suma seriei, atunci:  $s_{2n} \leq s$  iar  $s_{2n-1} \geq s$  și deci avem următoarea situație

$$s_2 < s_4 < \dots < s_{2n} < \dots < s < \dots < s_{2n+1} < \dots < s_3 < s_1,$$

de unde rezultă:

$$0 < s - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1} \quad \text{și} \quad 0 < s_{2n+1} - s < s_{2n+1} - s_{2n+2} = u_{2n+2}.$$

Prin urmare, dacă aproximăm suma seriei cu o sumă parțială  $s_n$ , eroarea care se face este mai mică decât primul termen neglijat. Eroarea este prin lipsă dacă  $n$  este par și prin adăugare dacă  $n$  este impar.

**Exemplu:** Să se calculeze cu patru zecimale exacte suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^n}.$$

Conform celor de mai sus vom pune condiția ca  $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} < 10^{-4}$ ,

de unde rezultă  $n \geq 5$ . Vom aproxima deci suma seriei cu

$$s_5 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \approx 0,78345.$$

## 1.8. Serii absolut convergente

**Definiția 1.8.1.** O serie cu termeni oarecare  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  se numește **absolut**

**convergentă**, dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  este convergentă.

**Teorema 1.8.1.** Orice serie absolut convergentă este convergentă.

*Demonstrație*

Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie absolut convergentă. Deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  este convergentă, din criteriul general de convergență al lui Cauchy rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_{\varepsilon}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte avem

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon,$$

pentru  $\forall n \geq n_{\varepsilon}$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ .

Rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă în virtutea aceluiași criteriu.

**Observația 1.8.1.** Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există serii convergente care nu sunt absolut convergente.

**Exemplu.** Seria armonică alternată  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  este convergentă, dar nu

este absolut convergentă, deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă.

**Definiția 1.8.2.** O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numește **semiconvergentă** (sau **condiționat convergentă**). Rezultă că seria armonică alternată este semiconvergentă.

Una din proprietățile cele mai importante ale unei sume finite de numere reale este proprietatea de comutativitate, care constă în faptul că suma nu se schimbă dacă schimbăm ordinea termenilor. Se pune în mod natural problema dacă proprietatea aceasta se păstrează și în cazul seriilor convergente. Răspunsul este în general negativ.

**Exemplu:** Fie seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots \quad (1.36)$$

Așa cum am văzut, suma acestei serii este  $s = \ln 2$ . Dacă notăm cu  $\{s_n\}$  șirul sumelor sale parțiale rezultă  $\ln 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

Considerăm acum seria următoare:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \dots \quad (1.37)$$

(obținută din seria armonică alternată prin schimbarea ordinii termenilor). Dacă notăm  $\{\sigma_n\}$  șirul sumelor parțiale ale acestei serii, rezultă:

$$\begin{aligned} \sigma_{3n} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} s_{2n}. \end{aligned}$$

Așadar avem:  $\sigma_{3n} = \frac{1}{2} s_{2n}$ . Evident, avem și relațiile:

$$\begin{aligned} \sigma_{3n-1} &= \frac{1}{2} s_{2n} + \frac{1}{4n} \\ \sigma_{3n-2} &= \sigma_{3n-1} + \frac{1}{4n-2}. \end{aligned}$$

Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \ln 2$  rezultă că  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2} \ln 2$ . Prin urmare seria (1.37), obținută din seria (1.36) printr-o schimbare a ordinii termenilor este convergentă și are suma  $\frac{1}{2} \ln 2$ .

Am arătat astfel că schimbând ordinea termenilor într-o serie semiconvergentă suma sa se schimbă. Prezentăm în continuare, fără demonstrație, următorul rezultat datorat lui B. Riemann.

**Teorema 1.8.2.** *Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încât noua serie să aibă suma egală cu un număr dat dinainte sau astfel încât seria să devină divergentă.*

Din Teorema 1.8.2 rezultă că într-o serie semiconvergentă nu este permisă schimbarea ordinii termenilor.

**Definiția 1.8.3.** *O serie convergentă care are proprietatea de comutativitate (adică suma sa nu se schimbă dacă se schimbă ordinea termenilor) se numește necondiționat convergentă.*

**Teorema 1.8.3. (Cauchy).** *Orice serie absolut convergentă este necondiționat convergentă.*

*Demonstrație*

Considerăm seria absolut convergentă  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și notăm cu  $s$  suma sa.

Notăm cu  $\sigma$  suma seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ .

**Etapa I.** Vom arăta că într-o serie absolut convergentă seriile formate cu termenii pozitivi, respectiv negativi sunt convergente și că suma seriei este egală cu diferența sumelor acestor serii.

Fie  $\{s_n\}$  șirul numerelor parțiale ale seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și fie  $\{\sigma_n\}$  șirul sumelor

parțiale ale seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ . Dacă notăm cu  $a_n$  suma termenilor pozitivi din  $s_n$  și cu  $-b_n$  suma termenilor negativi din  $s_n$  rezultă:  $s_n = a_n - b_n$ ,  $\sigma_n = a_n + b_n$  și mai departe

$$a_n = \frac{1}{2}(\sigma_n + s_n), \quad b_n = \frac{1}{2}(\sigma_n - s_n).$$

Așadar, avem:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}(\sigma + s); \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}(\sigma - s) \quad \text{și} \quad s = a - b.$$

**Etapa II.** Vom arăta că o serie cu termeni pozitivi convergentă este necondiționat convergentă.

Presupunem deci că  $u_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Fie seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n$  obținută din seria

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  prin schimbarea ordinii termenilor. Evident  $\tilde{u}_n = u_{k_n}$ ,  $k_n \in \mathbb{N}^*$ . Deoarece

$\tilde{s}_n = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \dots + \tilde{u}_n < s$  rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n$  este convergentă și suma sa  $\tilde{s} \leq s$ .

Pe de altă parte, putem presupune că seria inițială  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este obținută din

seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n$  prin schimbarea ordinii termenilor, de unde rezultă  $s \leq \tilde{s}$ , deci  $s = \tilde{s}$ .

**Etapa III.** Vom arăta că orice serie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  absolut convergentă este

necondiționat convergentă. Dacă notăm cu  $\{u'_n\}$  termenii negativi și cu  $\{u''_n\}$  termenii negativi, atunci din prima parte a demonstrației rezultă:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n, \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} u''_n \quad \text{și} \quad s = a - b.$$

Orice schimbare a ordinii termenilor în seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  revine la schimbarea ordinii termenilor în seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ , respectiv  $\sum_{n=1}^{\infty} u''_n$ . Cum sumele acestor serii nu se schimbă dacă se schimbă ordinea termenilor (așa cum s-a demonstrat în etapa II) rezultă că  $\tilde{s} = a - b = s$ , și cu aceasta teorema este demonstrată.

### 1.9. Operații cu serii convergente

**Teorema 1.9.1.** Dacă seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  sunt convergente și au sumele  $U$ , respectiv  $V$  atunci  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$  este convergentă și are suma egală cu  $\alpha U + \beta V$ .

*Demonstrație*

Afirmația rezultă imediat din următoarea egalitate:

$$\sum_{k=1}^n (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=1}^n u_k + \beta \sum_{k=1}^n v_k.$$

Prin produsul a două serii  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  se înțelege orice serie de forma

$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  unde  $w_n = u_k v_l$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ . Există deci o infinitate de posibilități pentru a înmulți două serii. Dintre acestea, două tipuri de serie produs sunt mai des utilizate și anume:

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots \quad (1.38)$$

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_n + u_2 v_n + \dots + u_n v_n + u_n v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots \quad (1.39)$$

Produsul a două serii convergente nu este în general o serie convergentă.

**Teorema 1.9.2.** *Dacă seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  sunt absolut convergente și au sumele  $U$ , respectiv  $V$ , atunci orice serie produs este absolut convergentă și are suma egală cu  $UV$ .*

*Demonstrație*

Fie  $\sum_{k=1}^{\infty} u_{i_k} v_{j_k}$  o serie produs oarecare. Deoarece

$$|u_{i_1} v_{j_1}| + |u_{i_2} v_{j_2}| + \dots + |u_{i_n} v_{j_n}| \leq (|u_1| + \dots + |u_m|)(|v_1| + \dots + |v_m|)$$

unde  $m = \max\{i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n\}$  și seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$  sunt convergente,

rezultă că seria  $\sum_{k=1}^{\infty} u_{i_k} v_{j_k}$  este absolut convergentă și deci convergentă.

Deoarece seriile absolut convergente sunt necondiționat convergente, rezultă că suma seriei  $\sum_{k=1}^{\infty} u_{i_k} v_{j_k}$  este egală cu suma seriei produs de tipul (1.39).

Se observă însă imediat că suma parțială  $p_n$  a seriei produs de tipul (1.39) este egală cu:

$$p_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)(v_1 + v_2 + \dots + v_n).$$

Rezultă că suma oricărei serii produs va fi egală cu  $\lim p_n = UV$  și cu aceasta teorema este demonstrată.

## 2. Șiruri și serii de funcții reale

### 2.1. Convergență simplă (punctuală) și convergență uniformă

Fie  $E \subset Y$  și  $\{f_n\}$  un șir de funcții definite pe  $E$  cu valori în  $Y$ . Fie de asemenea  $f: E \rightarrow Y$ .

**Definiția 2.1.1.** Spunem că șirul de funcții  $\{f_n\}$  converge simplu (punctual) pe mulțimea  $E$  la funcția  $f$ , dacă  $\forall x \in E$ , șirul de numere reale  $\{f_n(x)\}$  converge la  $f(x)$ . Folosim notația  $f_n \xrightarrow[E]{s} f$ . Evident, când se schimbă  $x$ , se schimbă și șirul  $\{f_n(x)\}$ . Rezultă că  $f_n \xrightarrow[E]{s} f$  dacă  $\forall x \in E$  și  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  un rang  $n(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  astfel încât:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n(x, \varepsilon).$$

**Exemplul 1.** Fie  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ . Dacă notăm cu

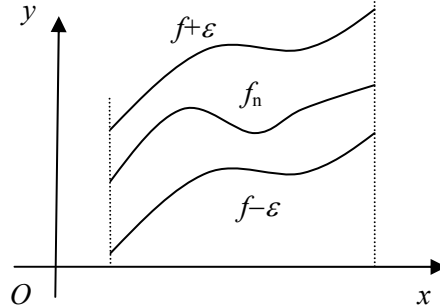
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{pentru } x = 1 \end{cases}, \quad \text{atunci } f_n \xrightarrow{[0,1]} f.$$

**Definiția 2.1.2.** Spunem că șirul de funcții  $\{f_n\}$  converge uniform pe mulțimea  $E$  la funcția  $f$ , dacă  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall x \in E. \quad (2.1)$$

Vom folosi notația  $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ .

Interpretarea geometrică a convergenței uniforme este următoarea: pentru  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  un rang  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât pentru  $\forall n \geq n_\varepsilon$ , graficul funcției  $f_n$  este cuprins între graficele funcțiilor  $f - \varepsilon$  și  $f + \varepsilon$ .



**Observația 2.1.1.** În definiția convergenței uniforme este important faptul că rangul  $n_\varepsilon$ , începând de la care are loc inegalitatea (1), depinde numai de  $\varepsilon$  și nu depinde de  $x$ . Dacă presupunem că funcțiile  $f$  și  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  sunt mărginite pe mulțimea  $E$ , atunci

$$f_n \xrightarrow[E]{} f \text{ dacă și numai dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0,$$

unde  $\rho_n = \sup \{ |f_n(x) - f(x)|, x \in E \}$ .

Într-adevăr, afirmația rezultă imediat dacă observăm că inegalitatea

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall x \in E$$

este echivalentă cu inegalitatea

$$\sup \{ |f_n(x) - f(x)|; x \in E \} < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Observația 2.1.2.** Este evident faptul că dacă un șir de funcții este uniform convergent pe o mulțime  $E$ , el este simplu convergent pe orice submulțime  $A \subset E$ . Afirmația reciprocă nu este în general adevărată.

Într-adevăr, să considerăm din nou șirul de funcții  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$  și funcția

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

Am văzut că  $f_n \xrightarrow[0,1]{} f$ .

Pe de altă parte se observă cu ușurință că

$$\rho_n = \sup \{ |f_n(x) - f(x)|; x \in [0, 1] \} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că  $\rho_n \rightarrow 1 \neq 0$ , deci, în virtutea Observației 2.1.2, șirul de funcții  $\{f_n\}$  nu converge uniform la  $f$  pe mulțimea  $[0, 1]$ .



**Teorema 2.1.1.** *Condiția necesară și suficientă ca un șir de funcții  $\{f_n\}$  să convergă uniform pe mulțimea  $E$  la funcția  $f$  este ca pentru  $\forall \varepsilon > 0$  să  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  pentru  $\forall x \in E, \forall n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ .*

*Demonstrație*

**Necesitatea.** Dacă  $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ , atunci  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E$ . Dacă  $p \in \mathbb{N}^*$ , atunci cu atât mai mult rezultă:

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_\varepsilon \text{ și } \forall x \in E.$$

În continuare avem:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pentru orice  $n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*$  și  $\forall x \in E$ .

**Suficiența.** Din ipoteză rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^* \text{ și } \forall x \in E, \quad (2.2)$$

Din (2.2) rezultă că pentru orice  $x \in E$  fixat, șirul de numere reale  $\{f_n(x)\}$  este fundamental și deci convergent, în virtutea criteriului general de convergență al lui Cauchy. Dacă notăm cu  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  și trecem la limită după  $p$  în inegalitatea (2.2) obținem:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall x \in E, \text{ deci } f_n \xrightarrow[E]{u} f.$$

Următoarea propoziție stabilește o condiție suficientă ca un șir de funcții să convergă uniform.

**Propoziția 2.1.1.** *Dacă există un șir de numere pozitive  $\{a_n\}$  cu proprietatea  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  și un rang  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât:*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \forall n \geq n_0 \text{ și } \forall x \in E, \quad (2.3)$$

atunci  $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ .

*Demonstrație*

Din (3) rezultă  $\rho_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|; x \in E\} \leq a_n, \forall n \geq n_0$ .

Cum  $a_n \rightarrow 0$  rezultă  $\rho_n \rightarrow 0$ , deci  $f_n \xrightarrow[E]{u} f$  în virtutea Observației 2.1.1.

**Exemplu.** Fie  $f_n(x) = \frac{2n + \sin nx}{n}$ ,  $x \in \Upsilon$  și fie  $f(x) = 2$ ,  $x \in \Upsilon$ . Observăm că  $\forall x \in \Upsilon$  avem:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Rezultă  $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ .

În continuare, vom examina în ce condiții o anumită proprietate comună (continuitate, derivabilitate etc.) a termenilor unui șir de funcții se transmite și limitei acestui șir. Observăm că, de regulă, convergența simplă este insuficientă pentru realizarea acestui transfer.

Într-adevăr, reluând exemplul 1, constatăm că deși funcțiile  $f_n$  sunt continue pe  $[0, 1]$ , limita șirului nu este continuă în punctul  $x = 1$ .

**Teorema 2.1.2.** Dacă șirul de funcții  $f_n \xrightarrow[E]{u} f$  și  $f_n$  este continuă pe  $E$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $f$  este continuă pe  $E$ .

*Demonstrație*

Fie  $a \in E$  oarecare fixat. Pentru  $\forall x \in E$  și  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  avem:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \quad (2.4)$$

Deoarece  $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $\forall n \geq n_\varepsilon$ ,  $\forall t \in E$ . Pe de altă parte, deoarece  $f_n$  este continuă în  $x = a$  rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon > 0$ , astfel încât  $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $\forall x \in E$  cu proprietatea  $|x - a| < \delta_\varepsilon$ .

Dacă în inegalitatea (2.4) presupunem  $n \geq n_\varepsilon$  și  $|x - a| < \delta_\varepsilon$ , rezultă  $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ , deci  $f$  este continuă în  $x = a$ .

**Observația 2.1.3.** Dacă presupunem că  $x = a$  este punct de acumulare al mulțimii  $E$ , atunci din Teorema 2.1.2 rezultă:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right].$$

Într-adevăr, continuitatea lui  $f$  (respectiv  $f_n$ ) în punctul  $x = a$  revine la:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , respectiv  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = f_n(a)$ .

Așadar avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right].$$

**Teorema 2.1.3.** Dacă  $f_n \xrightarrow[u]{[a,b]} f$  și  $f_n$  este continuă pe  $[a,b]$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx$ .

*Demonstrație*

Din Teorema 2.1.2 rezultă că  $f$  este continuă pe  $[a,b]$ , deci că  $f$  este integrabilă pe  $[a,b]$ . În continuare avem:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \rho_n \int_a^b dx = (b-a)\rho_n. \end{aligned}$$

Cum  $\rho_n \rightarrow 0$ , rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.5)$$

**Teorema 2.1.4.** Fie  $\{f_n\}$  un șir de funcții derivabile pe intervalul  $(a,b)$ , cu proprietatea că șirul derivatelor  $\{f'_n\}$  este uniform convergent pe  $(a,b)$ . Dacă șirul însuși  $\{f_n\}$  converge cel puțin într-un punct  $x_0 \in (a,b)$ , atunci  $\{f_n\}$  converge uniform pe  $(a,b)$  la o funcție  $f$ , care este derivabilă pe  $(a,b)$  și  $\forall x \in (a,b)$  avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'(x).$$

*Demonstrație*

Pentru orice  $x \in E$ ,  $\forall n$  și  $p \in \mathbb{N}^*$  avem

$$\begin{aligned} f_{n+p}(x) - f_n(x) &= f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_0) + f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) = \\ &= (f_{n+p} - f_n)(x) - (f_{n+p} - f_n)(x_0) + f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0). \end{aligned}$$

Din Teorema Lagrange rezultă că  $\exists c$  între  $x_0$  și  $x$  astfel încât:

$$(f_{n+p} - f_n)(x) - (f_{n+p} - f_n)(x_0) = (f'_{n+p} - f'_n)(c)(x - x_0).$$

Prin urmare avem:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f'_{n+p}(c) - f'_n(c)| |x - x_0| + |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)|. \quad (2.6)$$

Deoarece  $\{f'_n\}$  este uniform convergent pe  $[a, b]$  rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|f'_{n+p}(t) - f'_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \forall n \geq n'_\varepsilon, \forall t \in [a, b].$$

Pe de altă parte  $\{f_n(x_0)\}$  este convergent, deci  $\exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n''_\varepsilon \text{ și } \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Fie  $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$ .

Dacă în inegalitatea (2.6) considerăm  $n \geq n_\varepsilon$  și  $p \in \mathbb{N}^*$  rezultă

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall x \in (a, b).$$

Din Teorema 2.1.1 rezultă că șirul  $\{f_n\}$  este uniform convergent pe  $(a, b)$ .

Fie  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  și  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ . Rămâne să arătăm că  $f$  este derivabilă în orice punct  $x \in [a, b]$  și  $f'(x) = g(x)$ . Pentru aceasta să observăm că  $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$  și  $\forall h \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x+h \in (a, b)$  avem

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x)}{h} - g(x) &= \frac{(f_{n+p} - f_n)(x+h) - (f_{n+p} - f_n)(x)}{h} + \\ &+ \left[ \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right] + [f'_n(x) - g(x)]. \end{aligned}$$

Aplicând din nou Teorema Lagrange rezultă că  $\exists c_1$  între  $x$  și  $x+h$  astfel încât

$$(f_{n+p} - f_n)(x+h) - (f_{n+p} - f_n)(x) = (f'_{n+p} - f'_n)(c_1)h.$$

Așadar,  $\forall x \in E$  și  $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$  avem:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x)}{h} - g(x) \right| &\leq |f'_{n+p}(c_1) - f'_n(c_1)| + \\ &+ \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right| + |f'_n(x) - g(x)|. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Deoarece  $f'_{n+p} \xrightarrow{(a,b)} g$ , rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$\left|f'_{n+p}(c_1) - f'_n(c_1)\right| + \left|f'_n(x) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq \tilde{n}_\varepsilon \text{ și } \forall p \in \square^*.$$

Pe de altă parte, deoarece

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = f'_n(x),$$

rezultă că  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât

$$\left|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in E, \forall h \in \Upsilon \text{ cu } x+h \in E \text{ și } |h| < \delta_\varepsilon.$$

Dacă în inegalitatea (2.7) presupunem  $n \geq \tilde{n}_\varepsilon$ ,  $p \in \square^*$  și  $|h| < \delta_\varepsilon$ , rezultă:

$$\left|\frac{f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x)}{h} - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (2.8)$$

Trecând la limită după  $p$  în inegalitatea (2.8) obținem:

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in E, \forall h \in \Upsilon \text{ cu } x+h \in E \text{ și } |h| < \delta_\varepsilon,$$

de unde rezultă că

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x)$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

**Definiția 2.1.3.** Fie  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  un șir de funcții reale definite pe mulțimea  $E \subset \Upsilon$

și fie  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  șirul sumelor parțiale asociat  $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$ . Perechea  $(\{u_n\}, \{s_n\})$  se

numește serie de funcții și se notează cu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

Seria se numește simplu convergentă (uniform convergentă) pe mulțimea  $E_0 \subset E$  dacă șirul sumelor parțiale  $\{s_n\}_{n \geq 1}$  este simplu convergent (uniform convergent) pe  $E_0$ .

Cea mai mare submulțime  $A \subset E$  pe care seria este simplu convergentă se numește mulțimea de convergență a seriei. Deci

$$A = \left\{ x_0 \in E; \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ este convergentă} \right\}.$$

Funcția  $s : A \rightarrow \Upsilon$  definită prin

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \forall x \in A$$

se numește suma seriei și se scrie

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + \dots + u_n + \dots$$

**Teorema 2.1.5. (Cauchy).** *Condiția necesară și suficientă ca seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  să fie uniform convergentă pe mulțimea  $E$  este ca pentru  $\forall \varepsilon > 0$  să  $\exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$  astfel încât*

$$\left| u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x) \right| < \varepsilon, \forall n \geq n_{\varepsilon}, p \in \mathbb{N}^* \text{ și } \forall x \in E.$$

*Demonstrație*

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este uniform convergentă pe  $E$  dacă și numai dacă  $\{s_n\}$  este uniform convergentă pe  $E$ , deci dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$\left| s_{n+p}(x) - s_n(x) \right| = \left| u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x) \right| < \varepsilon,$$

$\forall n \geq n_{\varepsilon}, \forall p \in \mathbb{N}^*$  și  $\forall x \in E$  (Vezi Teorema 2.1.1).

**Definiția 2.1.4.** *Un șir de funcții  $\{f_n\}$  definite pe mulțimea  $E \in \mathcal{Y}$  se numește **uniform mărginită** pe  $E$  dacă  $\exists M > 0$  astfel încât  $|f_n(x)| \leq M, \forall x \in E$  și  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .*

**Teorema 2.1.6. (Abel-Dirichlet).** *Fie  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  un șir de funcții pe  $E$ , monoton descrescător pentru orice  $x \in E$  fixat și cu proprietatea  $a_n \xrightarrow[E]{u} 0$ .*

*Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  o serie de funcții pe  $E$  cu proprietatea că șirul sumelor parțiale  $\{s_n\}$*

*este uniform mărginit pe  $E$ . Atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$  este uniform convergentă pe  $E$ .*

Demonstrația rezultă din Teorema 2.1.5 și practic coincide cu demonstrația Teoremei 1.6.1.

**Exemplul 2.** Să se studieze convergența uniformă a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}, x \in (0, \infty).$$

Fie  $a_n(x) = \frac{1}{n+x}$  și  $v_n(x) = (-1)^n, x \in (0, \infty)$ .

Deoarece

$$0 < \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}, \forall x > 0 \text{ și } \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ rezultă } a_n \xrightarrow{(0,\infty)} 0.$$

Pe de altă parte este evident că  $\{a_n(x)\}$  este descrescător pentru orice  $x$  fixat. Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  este o serie numerică în acest caz și are șirul sumelor parțiale

mărginit ( $|s_n| \leq 1, \forall n$ ). Din Teorema 2.1.6 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$  este uniform convergentă pe  $(0, \infty)$ .

Există și următoarea variantă a criteriului Abel-Dirichlet de convergență uniformă pentru serii.

**Teorema 2.1.6'.** Fie  $\{a_n\}$  un șir de funcții pe  $E$ , monoton descrescător pentru orice  $x$  fixat și uniform mărginit pe  $E$ . Dacă seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  este uniform convergentă pe  $E$ , atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$  este uniform convergentă pe  $E$ .

*Demonstrație*

Dacă notăm cu  $\sigma_k = v_{n+1} + \dots + v_{n+k}$ , atunci avem:

$$\begin{aligned} a_{n+1}v_{n+1} + \dots + a_{n+p}v_{n+p} &= a_{n+1}\sigma_1 + a_{n+2}(\sigma_2 - \sigma_1) + \dots + a_{n+p}(\sigma_p - \sigma_{p-1}) = \\ &= (a_{n+1} - a_{n+2})\sigma_1 + (a_{n+2} - a_{n+3})\sigma_2 + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})\sigma_{p-1} + a_{n+p}\sigma_p = \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} (a_{n+k} - a_{n+k+1})\sigma_k + a_{n+p}\sigma_p. \end{aligned}$$

Prin ipoteză  $\exists M > 0$  astfel încât  $|a_k(x)| \leq M, \forall x \in E$  și  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Deoarece  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  este uniform convergentă pe  $E$ , din Teorema 2.1.5 rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $|\sigma_k(x)| < \varepsilon$ , pentru  $\forall n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall k$  natural. Fie  $n \geq n_\varepsilon$  și  $p \in \mathbb{N}^*$  oarecare. Atunci

$$\left| a_{n+1}(x)v_{n+1}(x) + \dots + a_{n+p}(x)v_{n+p}(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n [a_{n+k}(x) - a_{n+k+1}(x)]\sigma_k \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + \left| a_{n+p}(x) \sigma_p(x) \right| < \varepsilon \sum_{k=1}^n [a_{n+k}(x) - a_{n+k+1}(x)] + \varepsilon |a_{n+p}(x)| = \\
& = \varepsilon [a_{n+1}(x) - a_{n+p}(x)] + \varepsilon |a_{n+p}(x)| \leq 3\varepsilon M, \forall x \in E.
\end{aligned}$$

Aplicând din nou Teorema 2.1.5 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$  este uniform convergentă pe  $E$ .

**Teorema 2.1.7. (Weierstrass).** *Dacă există o serie numerică cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  convergentă și un rang  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $|u_n(x)| \leq c_n, \forall x \in E$  și  $\forall n \geq n_0$ , atunci seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este uniform convergentă pe  $E$ .*

*Demonstrație*

Deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  este convergentă, rezultă că  $\forall \varepsilon > 0 \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon, \forall n \geq n'_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ . Fie  $n_\varepsilon = \max(n_0, n'_\varepsilon), n \geq n_\varepsilon$  și  $p \in \mathbb{N}^*$ . Atunci avem

$$|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon,$$

$\forall x \in E$ . Afirmatia rezultă acum din Teorema 2.1.3.

**Exemplul 3.** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2}$  este uniform convergentă pe  $\mathbb{R}$  deoarece avem:

$$\left| \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

iar seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  este convergentă.

Pentru un număr finit de funcții sunt cunoscute proprietățile: a) dacă funcțiile sunt continue, atunci și suma lor este continuă; b) integrala sumei este suma integralelor; c) derivata sumei este suma derivatelor. Teoremele care urmează stabilesc în ce condiții aceste proprietăți se păstrează pentru o infinitate de funcții.

Demonstrațiile lor decurg din rezultatele corespunzătoare pentru șirurile de funcții (Teoremele 2.1.2; 2.1.3; 2.1.4) și Definiția 2.1.3.



**Teorema 2.1.8.** Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este uniform convergentă pe  $E$ , având suma  $s$  și dacă funcțiile  $u_n$  sunt continue pe  $E$ , atunci și funcția  $s$  este continuă pe  $E$ .

**Teorema 2.1.9.** Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este uniform convergentă pe intervalul  $[a, b]$ , având suma  $s$  și dacă funcțiile  $u_n$  sunt continue pe  $E$ , atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx = \int_a^b \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \right] dx.$$

Teorema 2.1.9 stabilește că seriile uniform convergente pot fi integrate termen cu termen.

**Teorema 2.1.10.** Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă cel puțin într-un punct  $x_0 \in (a, b)$  și dacă funcțiile  $u_n$  sunt derivabile pe  $(a, b)$ , astfel încât seria derivatelor  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$  este uniform convergentă pe  $(a, b)$ , având suma  $t$ , atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este uniform convergentă pe  $(a, b)$ , suma sa  $s$  este derivabilă și  $s'(x) = t(x)$ ,  $\forall x \in (a, b)$ .

Teorema 2.1.10 stabilește condiții suficiente ca o serie de funcții să se poată deriva termen cu termen. Relația  $s'(x) = t(x)$  se poate scrie mai sugestiv astfel:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

**Exemplu:** Funcția  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .

Într-adevăr, seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$  este uniform convergentă pe  $\mathbb{R}$ ,

deoarece  $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$  (Teorema 2.1.7).

Seria derivatelor  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  este de asemenea uniform convergentă pe  $Y$ , deoarece  $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ . Din Teorema 2.1.10 rezultă că  $f$  este derivabilă pe  $Y$  și  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ .

## 2.2. Formula Taylor

Formula Taylor este una din formulele de bază din analiza matematică, care are numeroase aplicații, legate în principal de aproximarea funcțiilor cu ajutorul polinoamelor.

**Teorema 2.2.1. (Taylor).** Fie  $I \subset Y$  un interval,  $a \in I$  un punct interior și  $f: I \rightarrow Y$  o funcție de  $n+1$  ori derivabilă pe  $I$ . Fie  $x \in I$  și  $p \in \mathbb{N}^*$ . Atunci există  $\xi$  între  $a$  și  $x$  astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \quad (2.9)$$

unde

$$R_n(x) = \left( \frac{x-a}{x-\xi} \right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (2.10)$$

Formula (2.9) se numește formula Taylor de ordinul  $n$  în  $x=a$ , iar funcția  $R_n$  se numește restul formulei Taylor de ordinul  $n$ . Forma restului dată în (2.10) se numește formula Schömlich-Roche.

*Demonstrație*

Notăm cu  $T_n$  polinomul Taylor de ordinul  $n$ , care se definește astfel:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad \forall x \in I. \quad (2.11)$$

Cu  $R_n$  notăm diferența:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad \forall x \in I. \quad (2.12)$$

Din (2.12) rezultă

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad (2.13)$$

adică exact formula (2.9).

Prin urmare rămâne să arătăm că restul  $R_n$  are forma dată în (2.10).

Fie  $x \in I$  oarecare fixat,  $x > a$  și fie

$$Q(x) = \frac{R_n(x)}{(x-a)^p}. \quad (2.14)$$

Cu această notație formula (2.13) devine

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^p Q(x). \quad (2.15)$$

Pentru a determina funcția  $Q$  considerăm următoarea funcție auxiliară

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + (x-t)^p Q(x). \quad (2.16)$$

Observăm că funcția  $\varphi$  este continuă pe  $[a, x]$ , derivabilă pe  $(a, x)$  și  $\varphi(a) = \varphi(x) = f(x)$ . Din Teorema Rolle rezultă că  $\exists \xi \in (a, x)$ , astfel încât

$$\varphi'(\xi) = 0. \quad (2.17)$$

Derivând (2.16) obținem:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} - \\ &\quad - p(x-t)^{p-1}Q(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - p(x-t)^{p-1}Q(x). \end{aligned}$$

Ținând seama de (2.17) rezultă:

$$Q(x) = \frac{(x-\xi)^n}{(x-\xi)^{p-1}} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}. \quad (2.18)$$

În sfârșit, din (2.14) și (2.18) obținem:

$$R_n(x) = \left( \frac{x-a}{x-\xi} \right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

**Observația 2.2.1.** Dacă  $f$  este un polinom de gradul  $n$ , atunci restul  $R_n(x) = 0$ ,  $\forall x \in I$  și formula Taylor devine:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \\ &= c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n. \end{aligned}$$

Astfel, în cazul unui polinom, formula Taylor revine la reprezentarea acestuia ca polinom în puterile lui  $x-a$ .

Din forma generală (2.10) a restului Taylor dată de Schömlisch-Roche, se obțin două forme particulare importante prin particularizarea lui  $p$ .

Pentru  $p = 1$ , expresia (2.10) devine:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2.19)$$

care se numește restul Taylor de ordinul  $n$  sub forma Cauchy.

Pentru  $p = n + 1$ , expresia (2.10) devine

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2.20)$$

care se numește restul Taylor de ordinul  $n$  sub forma Lagrange.

Deoarece  $\xi$  se află între  $a$  și  $x$ , există  $0 < \theta < 1$  astfel încât  $\xi - a = \theta(x - a)$ .

Dacă notăm cu  $h = x - a$ , rezultă  $x = a + h$ ,  $\xi = a + \theta h$ ,  $x - \xi = (1 - \theta)h$  și formula Taylor se scrie:

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x), \quad (2.21)$$

unde restul are una din formulele

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (\text{Schömlisch-Roche}) \quad (2.10')$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (\text{Cauchy}) \quad (2.19')$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (\text{Lagrange}) \quad (2.20')$$

Deoarece formulele Cauchy (2.19) și Lagrange (2.20) ale restului  $R_n$  corespund la valori diferite ale lui  $p$  și deoarece  $\theta$  depinde în general de  $p$ , rezultă că valorile lui  $\theta$  în (2.19') și (2.20') sunt în general diferite.

Dacă  $a = 0 \in I$ , formula (2.21) se numește formula Mac Laurin. Așadar, formula Mac Laurin cu restul Cauchy este:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad (2.22)$$

iar, formula Mac Laurin cu restul Lagrange este:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x). \quad (2.23)$$

**Definiția 2.2.1.** O funcție  $f$  definită pe o vecinătate a punctului  $x = a$  se numește infinit mică în  $x = a$  dacă  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . Fie  $f$  și  $g$  două funcții infinit mici

în  $x = a$ . Spunem că  $f$  este infinit mică de ordin mai mare ca  $g$  și notăm  $f = o(g)$

dacă  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

Din formula (2.20) rezultă:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} (x-a) f^{(n+1)}(\xi) = 0,$$

deci

$$R_n(x) = o((x-a)^n). \quad (2.24)$$

Ultima egalitate se numește restul formulei Taylor în forma lui Peano.

În continuare vom scrie formula Mac Laurin pentru câteva funcții uzuale:

1. Pentru funcția  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , avem

$$f^{(n)}(x) = e^x \text{ și } f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ deci}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2. Pentru funcția  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , avem:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \text{ deci}$$

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 2k \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{dacă } n = 4k+1 \text{ sau } 4k+3. \end{cases}$$

Așadar avem:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

3. Pentru funcția  $f(x) = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  avem

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ și } f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 2k+1 \\ (-1)^k & \text{dacă } n = 4k. \end{cases}$$

Formula Mac Laurin este în acest caz:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

4. Pentru funcția  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x \in (-1, \infty)$ ,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Formula Mac Laurin va fi:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

5. Pentru funcția  $f(x) = (1+x)^\alpha$  avem:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \text{ și}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

Formula Mac Laurin este

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

În cazul particular când  $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ ,  $R_n(x) = 0$  (pentru că  $f^{(n+1)}(x) = 0$ ) și formula Mac Laurin coincide în acest caz cu formula binomului lui Newton.

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!}x^n = \\ &= 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n. \end{aligned}$$

Formula Taylor (Mac Laurin) este utilă în calculul unor limite de funcții.

**Exemplu.** Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$ . Aplicând formulele stabilite anterior obținem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x^3 \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \alpha(x)}{1 + \alpha(x)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

(unde  $\alpha(x) = \frac{o(x^4)}{x^4} \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow 0$ ).

În continuare vom prezenta două aplicații interesante ale formulei Taylor în studiul funcțiilor reale.

Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval deschis,  $a \in I$  și  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se știe că o condiție necesară ca punctul  $x = a$  să fie punct de extrem pentru  $f$  este ca  $f'(a) = 0$  (în ipoteza că  $f$  este derivabilă în  $x = a$ ).

Următoarea teoremă stabilește condiții suficiente pentru existența punctelor de extrem.

**Teorema 2.2.2.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că are derivate continue pe  $I$  până la ordinul  $n$  inclusiv și  $a \in I$  un punct interior astfel încât:

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Dacă  $n$  este par, atunci  $x = a$  este punct de extrem pentru  $f$  și anume, de maxim dacă  $f^{(n)}(a) < 0$ , respectiv de minim dacă  $f^{(n)}(a) > 0$ .

Dacă  $n$  este impar  $x = a$  nu este punct de extrem.

*Demonstrație*

Din formula Taylor cu restul lui Lagrange rezultă

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \forall x \in I,$$

unde  $\xi$  se află între  $a$  și  $x$ .

Să presupunem  $n$  par și  $f^{(n)}(a) < 0$ . Deoarece  $f^{(n)}$  este o funcție continuă în  $x = a$ , rezultă că există un interval deschis  $J$  astfel încât  $a \in J \subset I$  și  $f^{(n)}(t) < 0, \forall t \in J, x \in J$  avem:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \leq 0,$$

de unde rezultă că

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in J,$$

deci  $x = a$  este punct de maxim local pentru  $f$ . Analog se arată că dacă  $f^{(n)}(a) > 0$ , atunci  $x = a$  este punct de minim local pentru  $f$ .

Dacă  $n$  este impar, atunci diferența  $f(x) - f(a)$  nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a punctului  $x = a$ , deci  $x = a$  nu este punct de extrem local pentru  $f$ .

**Corolarul 2.2.1.** Dacă  $f'(a) = 0$  și  $f''(a) \neq 0$ , atunci  $x = a$  este punct de minim dacă  $f''(a) > 0$ , respectiv punct de maxim dacă  $f''(a) < 0$ .

Dacă  $f'(a) = f''(a) = 0$  și  $f'''(a) \neq 0$ , atunci  $x = a$  nu este punct de extrem pentru  $f$  (este punct de inflexiune).

**Definiția 2.2.2.** O funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se numește de clasă  $C^p$  pe  $I$ , dacă  $f$  are derivate continue pe  $I$  până la ordinul  $p$  inclusiv. Se folosește notația  $f = C^p(I)$ .

**Definiția 2.2.3.** O funcție  $f \in C^2(I)$  se numește convexă (concavă) pe  $I$ , dacă  $\forall a, x \in I$  avem

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad [f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a)]$$

Din punct de vedere geometric funcția este convexă (concavă) dacă graficul său este situat deasupra (dedesubtul) tangentei în orice punct al său.

**Propoziția 2.2.1.** Dacă  $f \in C^2(I)$  și  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ) pentru orice  $x \in I$ , atunci  $f$  este convexă (concavă) pe intervalul  $I$ .

*Demonstrație*

Fie  $a, x \in I$ . Din formula Taylor pentru  $n = 1$  rezultă:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2,$$

unde  $\xi$  se află între  $a$  și  $x$ .

Dacă  $f'' > 0$  pe  $I$  rezultă

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2 \geq 0, \quad \forall x \in I,$$

deci  $f$  este convexă pe intervalul  $I$ . Analog, dacă  $f'' < 0$  pe  $I$  rezultă

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a), \quad \forall x \in I,$$

deci  $f$  este concavă pe  $I$ .

## 2.3. Serii Taylor și Mac Laurin

**Definiția 2.3.1.** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție indefinit derivabilă pe  $I$  și  $a \in I$  un punct interior. Seria de funcții

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (2.25)$$

se numește seria Taylor atașată funcției  $f$  în  $x = a$ . Dacă notăm cu  $A$  mulțimea de convergență a seriei (2.25) (Vezi Definiția 2.1.3.) atunci observăm că  $a \in A$ , deci  $A \neq \emptyset$ .

Spunem că funcția  $f$  se dezvoltă în serie Taylor în jurul punctului  $x = a$  pe mulțimea  $B \subset I \cap A$ , dacă  $\forall x \in B$  avem:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (2.26)$$



În cazul particular  $a = 0 \in I$ , seria (2.25) devine

$$f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

și se numește seria Mac Laurin.

**Observația 2.3.1.** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție indefinit derivabilă pe  $I$  și  $a \in I$ . În general nu este adevărat că funcția  $f$  se poate dezvolta în serie Taylor în jurul punctului  $x = a$  pe mulțimea  $A \cap I$  așa cum rezultă din următorul exemplu datorat lui Cauchy.

**Exemplu.** 
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Vom arăta că  $f$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Într-adevăr, dacă  $x \neq 0$ , atunci  $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ . Cum  $f$  este continuă în  $x = 0$ , avem:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{e^{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{6}{x^4}}{-\frac{2}{x^3} e^{x^2}} = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^{x^2}}} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{x^2}} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{e^{x^2}}} = 0. \end{aligned}$$

În general avem:  $f^{(n)}(0) = \frac{P(x)}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}}$  dacă  $x \neq 0$ , unde  $P$  este polinom. Aplicând de un număr suficient de mare regula L'Hospital rezultă:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = P(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = P(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^k}}{\frac{1}{e^{x^2}}} = 0.$$

Seria Mac Laurin atașată lui  $f$  este convergentă pe  $\mathbb{R}$  și are suma  $s(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Rezultă că  $f(x) \neq s(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , deci  $f$  nu se dezvoltă în serie Mac Laurin pe nici o mulțime  $B \subset \mathbb{R}, B \neq \{0\}$ .

**Teorema 2.3.1.** *Condiția necesară și suficientă ca funcția  $f$  să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului  $x = a$  pe mulțimea  $B \subset I \cap A$  este ca*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in B.$$

*Demonstrație*

Observăm că polinomul Taylor de ordinul  $n$  atașat funcției  $f$  în punctul  $x = a$  este exact suma parțială de ordinul  $n$  a seriei Taylor atașat lui  $f$  în  $x = a$ . Dacă notăm cu  $s$  suma seriei (2.26) atunci

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x), \quad \forall x \in A. \quad (2.27)$$

Pe de altă parte, din formula Taylor avem:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \forall x \in I. \quad (2.28)$$

Faptul că  $f$  se dezvoltă în serie Taylor pe mulțimea  $B \subset A \cap I$  revine la a spune că  $f(x) = s(x)$ ,  $\forall x \in B$ . Din (2.27) și (2.28) rezultă că  $f(x) = s(x)$ ,  $\forall x \in B$  dacă și numai dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ,  $\forall x \in B$ .

**Corolarul 2.3.1.** *Dacă există  $M > 0$  astfel încât*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ și } \forall x \in B \subset A \cap I,$$

*atunci  $f$  se dezvoltă în serie Taylor în jurul punctului  $x = a$  pe mulțimea  $B$ .*

*Demonstrație*

Pentru orice  $x \in B$  fixat, avem:

$$|R_n(x)| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = u_n. \quad (2.29)$$

Observăm că  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , deoarece  $u_n$  este termenul general al unei serii cu termeni pozitivi convergente, așa cum rezultă imediat din criteriul raportului

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-a|}{n+2} = 0 < 1 \right).$$

Așadar,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ,  $\forall x \in B$  și afirmația din Corolar rezultă acum din Teorema 2.3.1.

### Exemple

1. Funcția  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  se dezvoltă în serie Taylor pe  $\mathbb{R}$  în jurul oricărui punct. Într-adevăr, pentru orice  $r > 0$ , avem:

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^r = M, \forall x \in [-r, r].$$

Din Corolarul 2.3.1 rezultă că funcția  $f(x) = e^x$  se dezvoltă în serie Taylor pe intervalul  $[-r, r]$  în jurul oricărui punct  $a \in (-r, r)$ . Cum  $r > 0$  a fost arbitrar, rezultă că dezvoltarea are loc pe  $\mathbb{R}$ . Dezvoltarea sa în serie Mac Laurin este:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Funcția  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  se dezvoltă în serie Taylor pe  $\mathbb{R}$  în jurul oricărui punct.

Într-adevăr,  $|f^{(n)}(x)| = \left| \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1 = M$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Dezvoltarea în serie Mac Laurin este:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Funcția  $f(x) = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  se dezvoltă în serie Taylor pe  $\mathbb{R}$  în jurul oricărui punct, deoarece

$$|f^{(n)}(x)| = \left| \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Funcția  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x \in (-1, \infty)$  se dezvoltă în serie Taylor în serie Mac Laurin pe intervalul  $(-1, 1]$ .

Din Teorema 2.3.1 rezultă că trebuie să demonstrăm că  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ,  $\forall x \in (-1, 1]$ . Prin inducție se demonstrează ușor că

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Pentru  $x \in [0, 1]$  scriem restul Taylor sub forma Lagrange și obținem

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.30)$$

Rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  pentru  $x \in [0, 1]$ .

Pentru  $x \in (-1, 0)$  folosim formula Cauchy a restului și obținem:

$$|R_n(x)| = \left| (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \right| < \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x} \quad (2.31)$$

unde  $\theta \in (-1, 0)$  și depinde în general de  $n$ .

Pentru a arăta că  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ,  $\forall x \in (-1, 0)$  este suficient să arătăm că

$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ,  $\forall x \in [-r, 0)$  unde  $0 < x < 1$  este arbitrar.

Fie deci  $-1 < -r \leq x < 0$ . Cum  $\theta \in (0, 1)$  rezultă  $-\theta < -\theta r \leq \theta x$ , deci  $0 < 1 - \theta < 1 - \theta r \leq 1 + \theta x$ . În continuare avem:

$$0 < \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} < 1 \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{1 - r} > \frac{1}{1 - r\theta} \geq \frac{1}{1 + \theta x}. \quad (2.33)$$

Ținând seama de (2.32) și (2.33) în (2.34) obținem:

$$|R_n(x)| < \frac{r^{n+1}}{1 - r}, \quad \forall x \in [-r, 0).$$

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ , rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  pentru  $\forall x \in (-1, 0)$  și cu aceasta demonstrația este terminată.

Dezvoltarea în serie Mac Laurin este

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1].$$

În particular, pentru  $x = 1$  obținem rezultatul cunoscut

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

5. Funcția  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $x \in (-1, \infty)$  se dezvoltă în serie Mac Laurin pe intervalul  $(-1, 1)$ .

Vom arăta că  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$ . Pentru restul Taylor vom folosi forma Cauchy.

Deoarece  $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ , rezultă

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)x^{n+1}}{n!} \cdot \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \cdot (1+\theta x)^{\alpha-1}, \quad (2.34)$$

unde  $\theta \in (0, 1)$  și depinde în general de  $n$ .

Dacă notăm cu  $u_n = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)x^{n+1}}{n!} \right|$  și presupunem  $|x| < 1$ , atunci

seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă, așa cum rezultă imediat din criteriul raportului

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - n - 1|}{n+1} |x| = |x| < 1 \right).$$

Așadar avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (2.35)$$

Pe de altă parte, dacă  $|x| < 1$  avem  $0 < 1 - \theta < 1 + \theta x$  de unde rezultă

$$0 < \left( \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right)^n < 1. \quad (2.36)$$

În sfârșit, observăm că pentru  $-1 < x < 1$  avem

$$1 - |x| \leq 1 - \theta |x| \leq |1 + \theta x| \leq 1 + \theta |x| \leq 1 + |x|,$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} |1 + \theta x|^{\alpha-1} \leq (1 + |x|)^{\alpha-1} & \text{dacă } \alpha > 1 \\ |1 + \theta x|^{\alpha-1} \leq (1 - |x|)^{\alpha-1} & \text{dacă } \alpha < 1 \end{cases} \quad (2.37)$$

Trecând la modul în (10) obținem:

$$|R_n(x)| = u_n \left( \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right)^n (1 + \theta x)^{\alpha-1} < u_n (1 + \theta x)^{\alpha-1}.$$

Din (2.35) și (2.37) rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$  și cu aceasta demonstrația este terminată.

În particular, pentru  $\alpha = -\frac{1}{2}$  obținem

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}x^n + \dots \quad \forall x \in (-1, 1).$$

## 2.4. Serii de puteri

O serie de puteri este o serie de funcții de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad x \in Y, \quad (2.38)$$

$\{a_n\}$  este un șir de numere reale.

Dacă notăm cu  $A$  mulțimea de convergență a seriei (1), atunci se observă că  $0 \in A$ , deci  $A \neq \Phi$ .

**Lema 2.4.1.** Dacă seria (1) este convergentă în  $x_0 \in Y$ , atunci ea este absolut convergentă în orice punct  $x \in Y$  cu proprietatea  $|x| < |x_0|$ .

*Demonstrație*

Deoarece seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  este convergentă, rezultă că șirul  $\{a_n x_0^n\}$  este convergent și are limita 0. Cum orice șir convergent este mărginit, rezultă că  $\exists M > 0$  astfel încât  $|a_n x_0^n| < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Pe de altă parte avem

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = v_n. \quad (239)$$

Dacă  $|x| < |x_0|$ , atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  este o serie geometrică convergentă (deoarece rația  $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ ). Din criteriul I de comparație rezultă că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  este convergentă și cu aceasta lema este demonstrată.

**Observația 2.4.1.** Lema 2.4.1 pune în evidență o proprietate importantă a mulțimii de convergență a unei serii de puteri și anume dacă  $x_0 \in A$ , atunci intervalul deschis  $(-|x_0|, |x_0|) \subset A$ .

**Observația 2.4.2.** Din Lema 2.4.1 rezultă că dacă  $x_0 \notin A$  și  $|x| > |x_0|$ , atunci  $x \notin A$ .

**Teorema 2.4.1. (Teorema I a lui Abel).** Pentru orice serie de puteri există un număr  $0 \leq \rho \leq \infty$ , cu proprietățile:

- 1) Seria este absolut convergentă pentru orice  $x \in Y, |x| < \rho$ .
- 2) Seria este divergentă pentru orice  $x \in Y, |x| > \rho$ .
- 3) Seria este absolut uniform convergentă pe intervalul  $[-r, r], \forall 0 < r < R$ .

Numărul  $\rho$  se numește raza de convergență, iar intervalul  $(-\rho, \rho)$  intervalul de convergență.

*Demonstrație*

Dacă mulțimea de convergență  $A$  se reduce la  $\{0\}$ , atunci  $\rho = 0$  și teorema este demonstrată.

Presupunem  $A \neq \{0\}$ .

**Cazul 1.** Dacă  $A$  este nemărginită superior, atunci  $A = Y$  și  $\rho = +\infty$ .

Într-adevăr, fie  $x_1 \in \square$  oarecare. Dacă  $A$  este nemărginită, atunci există  $x_0 \in A$  astfel încât  $|x_0| > |x_1|$ , deci seria este absolut convergentă în  $x_1$ , conform Lemei 2.4.1. Cum  $x_1 \in \square$  era arbitrar, rezultă că seria este absolut convergentă pe  $Y$ .

**Cazul 2.** Dacă  $A$  este mărginită superior, atunci  $\rho = \sup A > 0$ . Într-adevăr, din definiția marginii superioare rezultă că dacă  $|x| < \rho$ , atunci  $\exists x_0 \in A$  astfel încât  $|x| < |x_0| < \rho$ ; conform Lemei 2.4.1 seria este absolut convergentă în  $x$ . Fie  $x \in Y$ , astfel încât  $|x| > \rho$ . Evident  $|x| > y > \rho$ . Dacă presupunem prin absurd că seria este convergentă în  $x$ , din Lema 2.4.1 rezultă  $y \in A$ , ceea ce contrazice definiția  $\rho = \sup A$ .

În sfârșit, faptul că seria este uniform convergentă pe  $[-r, r]$ ,  $\forall 0 < r < \rho$ , rezultă din Teorema 2.1.7 (Weierstrass), observând că pentru  $\forall x \in [-r, r]$  avem

$|a_n x^n| < |a_n r^n|$ , iar seria numerică  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$  este convergentă. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă ne dă un procedeu practic de calcul al razei de convergență.

**Teorema 2.4.2. (Cauchy-Hadamard).** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  o serie de puteri,  $\rho$  raza

sa de convergență și  $\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ . Atunci:

- 1)  $\rho = \frac{1}{\omega}$  dacă  $0 < \omega < \infty$ .
- 2)  $\rho = 0$  dacă  $\omega = +\infty$ .
- 3)  $\rho = \infty$  dacă  $\omega = 0$ .

*Demonstrație*

Aplicând criteriul rădăcinii (Teorema 1.5.6, Corolarul 1) seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  obținem

$$L = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \omega |x|.$$

- 1) Fie  $0 < \omega < \infty$ .

Dacă  $|x| < \frac{1}{\omega}$ , atunci  $L < 1$ , deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  este convergentă.

Fie  $|x| > \frac{1}{\omega}$ . Evident există  $|x| > y > \frac{1}{\omega}$ . Dacă presupunem prin absurd că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  este convergentă în punctul  $x$ , atunci din Lema 4.1 rezultă că ea este absolut convergentă în punctul  $y$ . Pe de altă parte,  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} y^n = \omega y > 1$ , de unde rezultă că  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| y^n$  este divergentă (Teorema 1.5.6, Corolarul 1). Am ajuns astfel la o contradicție. Deci  $\rho = \frac{1}{\omega}$ .

2) Fie  $\omega = \infty$  și  $x_0 \neq 0$  oarecare. Vom arăta că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  este divergentă. Într-adevăr, fie  $0 < y < |x_0|$ . Dacă presupunem prin absurd că  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  este convergentă, atunci din Lema 4.1 rezultă  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| y^n$  este convergentă. Pe de altă parte avem:  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} y^n = \omega y > 1$ , deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| y^n$  este divergentă (contradicție). Cum  $x_0 \neq 0$  a fost arbitrar, rezultă  $A = \{0\}$ , deci  $\rho = 0$ .

3) Dacă  $\omega = 0$ , atunci  $L = 0 \cdot |x| = 0 < 1$ , deci seria  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  este convergentă. Rezultă  $A = \mathbb{Y}$ , deci  $\rho = +\infty$ .

**Observația 2.4.3.**  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  dacă această limită există. Într-adevăr,

dacă  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ , atunci există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  (cu convențiile  $\frac{1}{0} = \infty$  și  $\frac{1}{\infty} = 0$ ). Dar

se știe că dacă  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , atunci  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ .

### Exemple



1. Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$  are raza de convergență  $\rho = 1$ . Într-adevăr, conform

Observației 2.4.3 avem:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Din Teorema 2.4.1 rezultă că seria este absolut convergentă pe intervalul  $(-1, 1)$  și divergentă pe mulțimea  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .

Pentru  $x = 1$  seria devine  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  care este convergentă, conform

criteriului Leibniz pentru serii alternate. Pentru  $x = -1$ , seria devine  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) =$

$= (-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  care este divergentă. Rezultă că mulțimea de convergență este

$A = (-1, 1]$ .

2. Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  are raza de convergență  $\rho = 0$ . Într-adevăr,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Mulțimea sa de convergență este  $A = \{0\}$ .

3. Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  are raza de convergență  $\rho = +\infty$ . Avem

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty.$$

Mulțimea de convergență este  $A = \mathbb{C}$ .

4. Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2^n}$  are raza de convergență  $\rho = \sqrt[3]{2}$ . Într-adevăr,

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \neq 3k \\ 2^{-k} & \text{dacă } n = 3k. \end{cases}$$

Șirul  $\{\sqrt[n]{a_n}\}$  se compune din subșirurile constante  $\{0\}$  și  $\{\sqrt[3n]{2^{-n}}\}$ , deci  $\omega =$   
 $= \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \max \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ . Din Teorema 2.4.2 rezultă  $\rho = \frac{1}{\omega} = \sqrt[3]{2}$ .

**Teorema 2.4.3.** *Suma unei serii de puteri este o funcție continuă pe intervalul de convergență al seriei.*

*Demonstrație*

Fie  $x \in (-\rho, \rho)$  oarecare fixat. Evident, există  $r$  astfel încât  $|x| < r < \rho$ . Deoarece seria este uniform convergentă pe intervalul  $[-r, r]$  (Teorema 2.4.1 punctul 3) rezultă că suma sa  $s$  este continuă pe  $[-r, r]$ , deci și în punctul  $x$ . (Am aplicat aici Teorema 2.1.8).

**Teorema 2.4.4.** *O serie de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  poate fi integrată termen cu termen pe intervalul de convergență al seriei. Seria de puteri care rezultă are aceeași rază de convergență cu seria inițială.*

*Demonstrație*

Fie  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $\forall x \in (-\rho, \rho)$ .

Fie  $|x| < \rho$  și  $r$  astfel încât  $|x| < r < \rho$ . Deoarece seria  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  este uniform convergentă pe  $[-r, r]$  din Teorema 2.1.9 rezultă

$$\int_0^x s(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Pe de altă parte avem:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n+1}} = \frac{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

de unde rezultă că seria are raza de convergență egală cu  $\rho$ .

**Teorema 2.4.5.** *O serie de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  poate fi derivată termen cu termen pe intervalul de convergență al seriei.*

*Demonstrație*

Seria derivatelor este:

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{na_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n},$$

rezultă că seria derivatelor are aceeași rază de convergență ca seria inițială.

Fie  $r \in (-\rho, \rho)$  oarecare și  $|x| < r < \rho$ . Deoarece seria derivatelor este uniform convergentă pe  $[-r, r]$ , din Teorema 2.1.10

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

unde

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

**Observația 2.4.4.** O serie de puteri poate fi derivată termen cu termen sau integrată termen cu termen, pe intervalul de convergență ori de câte ori dorim. De fiecare dată, seria obținută are aceeași rază de convergență cu seria inițială.

**Teorema 2.4.6. (Teorema a II-a lui Abel).** Fie seria de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ ,

având raza de convergență  $\rho < \infty$  și suma  $s$ . Dacă seria este convergentă în punctul  $x = \rho$ , atunci suma sa  $s$  este continuă pe intervalul  $(-\rho, \rho]$ .

*Demonstrație*

Din Teorema 2.4.3 rezultă continuitatea lui  $s$  pe  $(-\rho, \rho)$ . Rămâne să dovedim continuitatea în  $x = \rho$ . Observăm că:

$$a_nx^n = (a_n\rho^n) \cdot \left(\frac{x}{\rho}\right)^n.$$

Șirul de funcții  $\left(\frac{x}{\rho}\right)^n$  este uniform mărginit pe intervalul  $[0, \rho]$  și

descrescător pentru orice  $x$  fixat. Cum seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\rho^n$  este convergentă, din criteriul

Abel-Dirichlet de convergență uniformă în varianta a II-a (Teorema 2.1.6') rezultă

că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$  este uniform convergentă pe  $[0, \rho]$ . Din Teorema 2.1.8 rezultă că

funcția  $s$  (suma seriei) este continuă pe  $[0, \rho]$ , deci și în punctul  $x = \rho$ .

**Exemplu.** Să se afle mulțimea de convergență și suma seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ .

Avem  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ , de unde rezultă  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$ . Pentru  $x = 1$ , seria devine

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$  și este convergentă (criteriul Leibniz). Pentru  $x = -1$ , seria

devine  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$  și este divergentă.

Mulțimea de convergență este deci  $A = (-1, 1]$ . Fie

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \forall x \in A.$$

Din Teorema 2.4.5 rezultă

$$s'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Seria din dreapta este o serie geometrică, cu rația  $q = -x^2$ . Rezultă

$$s'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Integrând ultima relație obținem:

$$s(x) = \arctg x + C, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Deoarece  $s(0) = 0$  rezultă  $C = 0$ , deci

$$\arctg x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Pe de altă parte, deoarece  $\rho = 1 \in A$ , din Teorema a II-a a lui Abel rezultă:

$$s(1) = \lim_{x \nearrow 1} s(x) = \lim_{x \nearrow 1} \arctg x = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Așadar avem

$$\arctg x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

În particular, pentru  $x = 1$  obținem:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

## 3. Spații metrice. Spații normate. Spații Hilbert

Spațiile metrice au fost introduse la începutul secolului XX de matematicianul francez M. Fréchet și constituie cadrul natural de prezentare a principiului contracției, care stă la baza demonstrării unor teoreme fundamentale din matematică, cum ar fi: teorema funcțiilor implicite, teorema de existență și unicitate pentru ecuații și sisteme de ecuații diferențiale (integrale) etc. De asemenea, spațiile metrice oferă un cadru suficient de general, relativ simplu, pentru studiul limitelor de funcții (șiruri) și a continuității funcțiilor.

### 3.1. Spații metrice. Principiul contracției

**Definiția 3.1.1.** O mulțime nevidă  $X$  se numește spațiu metric dacă există o funcție  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  cu proprietățile:

- a)  $d(x, y) \geq 0$ ,  $\forall x, y \in X$  și  $d(x, y) = 0$  dacă și numai dacă  $x = y$ .
- b)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in X$ .
- c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ,  $\forall x, y \in X$ .

Funcția  $d$  se numește funcția-distanță sau metrica spațiului. Evident, dacă  $(X, d)$  este un spațiu metric și  $Y \subset X$ , atunci  $(Y, d)$  este de asemenea spațiu metric.

**Propoziția 3.1.1.** Dacă  $(X, d)$  este spațiu metric, atunci:

$$|d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4)| \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4), \quad \forall x_i \in X, i = \overline{1, 4}.$$

*Demonstrație*

Din proprietatea c) a distanței rezultă

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_4) + d(x_4, x_2)$$

$$d(x_3, x_4) \leq d(x_3, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, x_4).$$

Ținând seama și de proprietatea b) obținem:

$$d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4) \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4) \quad (3.1)$$

$$d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4) \geq -[d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4)] \quad (3.2)$$

Din (3.1) și (3.2) rezultă:

$$|d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4)| \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4).$$

### Exemple de spații metrice

1. Mulțimea  $\mathbb{Y}$  a numerelor reale este spațiu metric în raport cu distanța euclidiană.

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Y}.$$

Facem observația că pe  $\mathbb{Y}$  se pot introduce și alte distanțe, de exemplu:

$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|} \quad \text{sau} \quad d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

2. Mulțimea  $\square^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \square, i = \overline{1, n}\}$  este un spațiu metric în raport cu distanța definită de

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \text{ unde } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ și } y = (y_1, \dots, y_n)$$

sunt elemente oarecare din  $\square^n$ . Verificarea proprietăților a)-c) este imediată.

3. Mulțimea numerelor complexe:

$$\square = \{z = x + iy; x, y \in \square\}$$

este un spațiu metric în raport cu distanța

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \forall z_1, z_2 \in \square$$

(reamintim că dacă  $z = x + iy$ , atunci  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ).

4. Fie  $E$  o mulțime oarecare și fie  $B(E)$  mulțimea funcțiilor reale și mărginite pe  $E$ , adică mulțimea funcțiilor  $f: E \rightarrow \square$  cu proprietatea că există  $M_f > 0$  astfel încât  $|f(x)| \leq M_f, \forall x \in E$ .

Mulțimea  $B(E)$  este spațiu metric în raport cu distanța:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in E\}, \forall f, g \in B(E) \quad (3.3)$$

Existența membrului drept din relația (3.1) rezultă din Teorema 1.1.1. Verificarea proprietăților a)-c) este imediată.

5. Orice mulțime  $X$  este spațiu metric în raport cu distanța trivială:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \neq y \\ 0 & \text{dacă } x = y. \end{cases}$$

Un astfel de spațiu metric nu prezintă interes decât din punct de vedere teoretic.

**Definiția 3.1.2.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric. Spunem că un șir de elemente  $\{x_n\}$  din  $\square^n$  converge la  $x \in \square^n$ , dacă șirul de numere reale  $\{d(x_n, x)\}$

converge la 0, deci dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ .  
Vom folosi notația  $x_n \rightarrow x$  sau  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

### Exemple

1. Dacă  $X = Y$  și  $d(x, y) = |x - y|$ , atunci  $\{x_n\}$  converge la  $x$  dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } |x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Regăsim astfel definiția cunoscută a șirului de numere reale convergent.

2. Fie  $X = \mathbb{R}^n$ , și fie  $\{x_k\}$  un șir de elemente (vectori) din  $\mathbb{R}^n$ . Fiecare element  $x_k$  va fi de forma  $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ ,  $x_{ki} \in Y, \forall i = \overline{1, n}$ . Dacă  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , atunci  $x_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} x$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $d(x_k, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ . Ținând seama de definiția distanței  $\mathbb{R}^n$  aceasta revine la:

$$|x_{ki} - x_i| < \varepsilon, \forall k \geq n_\varepsilon, \forall i = \overline{1, n}.$$

Am obținut astfel următorul rezultat:

**Teorema 3.1.1.** Șirul de elemente  $\{x_k\}$  converge în  $\mathbb{R}^n$  la elementul  $x$ , dacă și numai dacă  $x_{ki}$  converge în  $Y$  la  $x_i, \forall i = \overline{1, n}$ .

În concluzie, convergența unui șir de elemente (vectori) din  $\mathbb{R}^n$ , revine la convergența pe componente.

De exemplu, șirul  $\left\{\frac{n+1}{n}, \frac{1}{n}\right\} \rightarrow (1, 0)$  în  $\mathbb{R}^2$ .

3. Fie  $X = \mathbb{C}$  și  $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

**Teorema 3.1.2.** Un șir de numere complexe  $\{z_n\}$ , unde pentru  $\forall n, z_n = x_n + iy_n$ , converge în  $\mathbb{C}$  la  $z = x + iy$ , dacă și numai dacă  $x_n \rightarrow x$  și  $y_n \rightarrow y$  în  $Y$ .

### Demonstrație

$z_n \rightarrow z$  în  $\mathbb{C}$  dacă și numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = 0.$$

Din inegalitățile evidente:

$$\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

rezultă că  $z_n \rightarrow z$  în  $\mathbb{C}$  dacă și numai dacă  $x_n \rightarrow x$  și  $y_n \rightarrow y$  în  $Y$ .

4. Fie  $X = B(E)$  mulțimea funcțiilor reale și mărginite pe  $E$ . Un șir de funcții  $\{f_n\}$  converge la  $f$  în  $B(E)$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât:

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in E} \{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon, \quad \forall \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Această definiție este evident echivalentă cu următoarea:  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall \quad n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall \quad x \in E$ . Sub această formă recunoaștem definiția șirului uniform convergent (Definiția 2.1.2). Facem observația că în Definiția 3.1.2, faptul că  $E \subset Y$  este lipsit de importanță, deci definiția șirului de funcții uniform convergent are sens pe o mulțime  $E$  oarecare.

Din cele de mai sus rezultă:

**Teorema 3.1.3.** *Un șir de funcții  $\{f_n\}$  converge la  $f$  în  $B(E)$  dacă și numai dacă  $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ .*

**Definiția 3.1.3.** *Un șir de elemente  $\{x_n\}$  dintr-un spațiu metric  $X$  se numește fundamental (Cauchy) dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad \forall \quad n, m \geq n_\varepsilon$ .*

Dacă  $X = Y$  și  $d(x, y) = |x - y|$ , reobținem definiția șirului fundamental de numere reale.

**Definiția 3.1.4.** *Un șir  $\{x_n\}$  se numește mărginit dacă  $\exists a \in X$  și  $r > 0$  astfel încât  $d(x_n, a) < r, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$ . Principalele proprietăți ale șirurilor de elemente dintr-un spațiu metric sunt concentrate în următoarea teoremă:*

**Teorema 3.1.4.** *Fie  $(X, d)$  un spațiu metric.*

i) *Dacă  $x_n \rightarrow x$  și  $y_n \rightarrow y$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ .*

ii) *Orice șir convergent are limită unică.*

iii) *Orice șir convergent este fundamental.*

iv) *Orice șir fundamental este mărginit.*

v) *Orice subșir al unui șir convergent este convergent și are limita egală cu limita șirului inițial.*

*Demonstrație*

i) Din Propoziția 3.1.1 avem:

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y) = 0$ , rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ .

ii) Presupunem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  și de asemenea  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ . Din i) rezultă

$$d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n) = 0, \text{ deci } x = y.$$



iii) Dacă  $x_n \rightarrow x$ , atunci  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  
 $\forall n \geq n_\varepsilon$ . Pentru  $\forall m \geq n_\varepsilon$  avem de asemenea,  $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Din proprietatea c) a distanței rezultă:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

deci  $\{x_n\}$  este fundamental.

iv) Fie  $\{x_n\}$  un șir fundamental și  $\varepsilon = 1$ . Atunci,  $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $d(x_n, x_m) < 1, \forall n, m \geq n_1$ . În particular,  $d(x_{n_1}, x_m) < 1, m \geq n_1$ . Fie

$$\alpha = \max \{d(x_{n_1}, x_m); m = 1, 2, \dots, n_1 - 1\}$$

și fie  $r = \max \{1, \alpha\}$ . Evident,  $d(x_{n_1}, x_m) < r, \forall m \in \mathbb{N}^*$ , deci  $\{x_n\}$  este mărginit.

v) Fie  $x_n \rightarrow x$ . Orice subșir al șirului  $\{x_n\}$  este la rândul său un șir de forma  $\{x_{k_n}\}$ , unde  $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$  este un șir strict crescător de numere naturale.

Pentru  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ . Deoarece  $k_n \geq n$ , rezultă  $d(x_{k_n}, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ , deci  $x_{k_n} \rightarrow x$ .

Am văzut că orice șir convergent este fundamental. Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există spații metrice care conțin șiruri fundamentale divergente.

**Exemplu.** Fie  $X = \mathbb{R}$  și  $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ . Considerăm șirul  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Acest șir este fundamental în  $\mathbb{R}$ , deoarece este fundamental în  $\mathbb{Y}$ , dar nu este convergent în  $\mathbb{R}$  deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e \notin \mathbb{R}$ .

**Definiția 3.1.5.** Un spațiu metric  $(X, d)$  se numește complet, dacă orice șir fundamental de elemente din  $X$  este convergent către un element din  $X$ . Din criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru șiruri de numere reale rezultă că  $\mathbb{Y}$  este spațiu metric complet în raport cu distanța euclidiană  $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Y}$ .

**Teorema 3.1.5.** Spațiul  $\mathbb{R}^n$  este complet.

*Demonstrație*

Fie  $\{x_k\}$  un șir de elemente din  $\mathbb{R}^n$ . Fiecare element  $x_k$  este de forma:

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}).$$

Din inegalitățile evidente:

$$|x_{ki} - x_{li}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_{ki} - x_{li}| = d(x_k, x_l) \leq \sum_{i=1}^n |x_{ki} - x_{li}|,$$

rezultă (ca în demonstrația Teoremei 3.1.1) că  $\{x_k\}$  este fundamental în  $\square^n$  dacă și numai dacă  $\{x_{ki}\}$  este fundamental în  $\Upsilon$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ . Afirmatia din teoremă rezultă acum din Criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru șiruri de numere reale și din Teorema 3.1.1. Într-adevăr, dacă  $\{x_k\}$  este fundamental în  $\square^n$ , atunci  $\{x_{ki}\}$  este fundamental în  $\Upsilon$ , deci convergent pentru  $\forall i = \overline{1, n}$ . Din Teorema 3.1.1. rezultă  $\{x_k\}$  convergent în  $\square^n$ .

**Teorema 3.1.6.** *Spațiul numerelor complexe este complet.*

*Demonstrație*

Dacă  $z_n = x_n + iy_n$ , atunci conform Teoremei 3.1.2,  $z_n \rightarrow z = x + iy$  dacă și numai dacă  $x_n \rightarrow x$  și  $y_n \rightarrow y$  în  $\Upsilon$ . În mod analog se arată că  $\{z_n\}$  este fundamental dacă și numai dacă  $\{x_n\}$  și  $\{y_n\}$  sunt fundamentale în  $\Upsilon$ . Afirmatia rezultă acum (ca în Teorema 3.1.5) din criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru șiruri de numere reale.

**Teorema 3.1.7.** *Spațiul  $B(E)$  al funcțiilor reale și mărginite pe  $E$  este complet.*

*Demonstrație*

Din Teorema 3.1.3 rezultă că  $\{f_n\}$  converge la  $f$  în  $B(E)$  dacă și numai dacă  $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ . Afirmatia din teoremă rezultă acum din Teorema 2.1.1, cu observația că în demonstrația Teoremei 3.1.1 nu a intervenit nicăieri faptul că  $E \subset \square$ .

**Definiția 3.1.6.** *Fie  $(X, d)$  un spațiu metric. Se numește contracție pe  $X$ , orice aplicație  $T: X \rightarrow X$  cu proprietatea că există  $0 \leq \alpha < 1$  astfel încât*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

**Teorema 3.1.8. (Banach).** *Dacă  $(X, d)$  este un spațiu metric complet și  $T: X \rightarrow X$  este o contracție, atunci există  $z \in X$ , unic, astfel încât  $T(z) = z$ .*

*Demonstrație*

Alegem un punct oarecare  $x_0 \in X$  și notăm cu

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1), \dots, x_n = T(x_{n-1}), \dots$$

Vom arăta că șirul  $\{x_n\}$  este fundamental. Într-adevăr,

$$d(x_1, x_2) = d(T(x_0), T(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), T(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) \leq \alpha^2 d(x_0, x_1).$$

Prin inducție completă se arată că:

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k d(x_0, x_1), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

În continuare avem

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+p}) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \dots + d(x_{k+p-1}, x_{k+p}) \leq \\ &\leq (\alpha^k + \alpha^{k+1} + \dots + \alpha^{k+p-1}) d(x_0, x_1) = \frac{\alpha^k - \alpha^{k+p}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) < \\ &< \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(x_0, x_1), \quad \forall k, p \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \quad (3.4)$$

Deoarece  $0 \leq \alpha < 1$ , avem  $\alpha^k \rightarrow 0$ , deci  $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $\alpha^k < \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{d(x_0, x_1)}, \forall k \geq k_\varepsilon$ . Rezultă  $d(x_k, x_{k+p}) < \varepsilon, \forall k \geq k_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ , deci  $\{x_k\}$  este șir fundamental. Cum  $X$  este complet rezultă că  $\exists z \in X$  astfel încât  $x_k \rightarrow z$ . Mai departe avem:

$$\begin{aligned} d(z, T(z)) &\leq d(z, x_k) + d(x_k, T(z)) = d(z, x_k) + d(T(x_{k-1}), T(z)) \leq \\ &\leq d(z, x_k) + \alpha d(x_{k-1}, z). \end{aligned}$$

Deoarece, conform Teoremei 3.1.4 punctul i), membrul drept tinde la 0, rezultă  $d(z, T(z)) = 0$ , deci  $T(z) = z$ . Pentru a demonstra unicitatea punctului fix  $z$ , să presupunem că  $\exists z' \in X$  astfel încât  $T(z') = z'$ . Atunci avem:

$$d(z, z') = d(T(z), T(z')) \leq \alpha d(z, z').$$

Cum  $0 \leq \alpha < 1$ , această inegalitate nu poate avea loc decât dacă  $d(z, z') = 0$ , adică dacă  $z = z'$  și cu aceasta teorema este demonstrată.

Șirul  $\{x_k\}$ , obținut pornind de la un punct arbitrar  $x_0 \in X$ , prin relația de recurență  $x_k = T(x_{k-1}), \forall k \in \mathbb{N}^*$ , se numește șirul aproximațiilor succesive, iar metoda de obținere a punctului fix  $z$  ca limita acestui șir, poartă numele de metoda aproximațiilor succesive. E. Picard a utilizat metoda aproximațiilor succesive cu mult înainte ca Banach să fi stabilit rezultatul său foarte general (Teorema 3.1.8). Din această cauză, această metodă se mai numește și metoda Picard-Banach.

Pentru a evalua eroarea în metoda aproximațiilor succesive, trecem la limită după  $p$  în inegalitatea (3.4) și obținem:

$$d(x_k, x) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \quad (3.5)$$

Așadar, dacă aproximăm pe  $z$  cu  $x_k$  facem o eroare care este mai mică decât  $\frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$ .

Teorema 3.1.8 are numeroase aplicații în matematică. Pentru exemplificare, vom arăta cum poate fi folosită metoda aproximațiilor succesive la rezolvarea ecuațiilor algebrice sau transcendente.

Fie ecuația

$$F(x) = 0, \quad x \in [a, b] \quad (3.6)$$

Această ecuație se înlocuiește cu ecuația echivalentă:

$$x = f(x); \quad x \in [a, b] \quad (3.7)$$

Acest lucru se poate realiza de exemplu, dacă notăm  $f(x) = x + F(x)$ . Să presupunem că  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  este derivabilă și există  $0 \leq \alpha < 1$  astfel încât

$$|f'(x)| \leq \alpha, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.8)$$

Din Teorema Lagrange rezultă că  $\forall x, y \in [a, b], \exists \xi$  între  $x$  și  $y$  astfel încât  $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$ . Ținând seama de (3.8) obținem:

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b]. \quad (3.9)$$

Din (3.9) rezultă că  $f$  este o contracție pe  $[a, b]$ , iar din Teorema 3.1.8 rezultă că există o soluție unică  $z$  a ecuației (3.7) care se poate obține cu metoda aproximațiilor succesive. Din punct de vedere geometric, orice soluție a ecuației (3.7) este abscisa unui punct de intersecție dintre dreapta  $y = x$  și graficul funcției  $y = f(x)$ .

Pe figura (1) se poate urmări șirul aproximațiilor succesive pentru  $0 < f'(x) \leq \alpha < 1$ , iar pe figura (2), pentru  $-1 < -\alpha \leq f'(x) < 0$ .

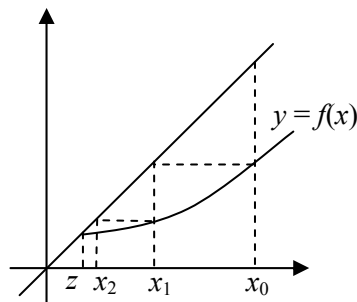


Fig. 1

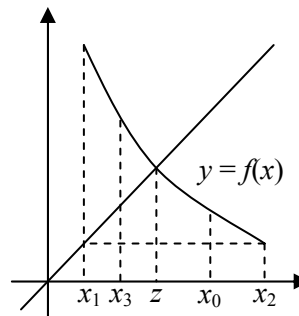


Fig. 2

**Exemplu.** Fie ecuația  $x^5 - x - 0,2 = 0$ , care admite o rădăcină în intervalul  $[-0,3; -0,2]$ . Ecuația echivalentă este  $x = x^5 - 0,2$ , deci  $f(x) = x^5 - 0,2$ . Se verifică imediat că  $|f'(x)| < 0,05$ ,  $\forall x \in [-0,3; -0,2]$ , deci putem lua  $\alpha = 0,05$ . Drept primă aproximație se poate lua  $x_0 = -0,2$ .

Aflarea unei soluții aproximative se face cu ajutorul calculatorului.

### 3.2. Spații normate

În definiția spațiului metric nu s-a presupus că mulțimea  $X$  are vreo structură algebrică. Din această cauză, într-un spațiu metric oarecare nu se poate dezvolta o teorie a seriilor, deoarece nu are sens operația de adunare. Pentru a elimina această deficiență vom introduce noțiunea de spațiu normat, în care se presupune că mulțimea  $X$  este un spațiu vectorial.

**Definiția 3.2.1.** Fie  $X$  un spațiu vectorial peste corpul  $K$  ( $\mathbb{R}$  sau  $\mathbb{C}$ ). Se numește normă pe  $X$  orice aplicație  $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietățile.

(i)  $\|x\| \geq 0$ ,  $\forall x \in X$  și  $\|x\| = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0_X$ .

(ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,  $\forall \lambda \in K, \forall x \in X$ .

(iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x \in X, \forall y \in X$ .

Perechea  $(X, \| \cdot \|)$  se numește spațiu normat.

**Exemple:**

1. Mulțimea  $\mathbb{R}$  este spațiu normat în raport cu norma:  $\|x\| = |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

2. Mulțimea  $\mathbb{R}^n$  este spațiu normat în raport cu norma  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|; 1 \leq i \leq n\}$ , unde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  este un vector oarecare.

3. Mulțimea numerelor complexe  $\mathbb{C}$  este spațiu normat în raport cu norma

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

4. Mulțimea  $B(E)$  a funcțiilor reale și mărginite pe  $E$  este spațiu normat în raport cu norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in E\}$$

**Observația 3.2.1.** Orice spațiu normat este spațiu metric în raport cu distanța

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x \in X, \forall y \in X.$$

Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există spații metrice care nu sunt spații normate.

**Exemplu.** Fie  $A$  o mulțime oarecare și fie  $X = \{f : A \rightarrow [0, 1]\}$ . Evident  $X$  este spațiu metric în raport cu distanța:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in E\}.$$

Observăm însă că  $X$  nu este spațiu normat deoarece nu este spațiu vectorial. Într-adevăr, dacă  $f, g \in X$  și  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , atunci  $\alpha f + \beta g$  în general nu aparține lui  $X$ .

Cum spațiile normate sunt cazuri particulare de spații metrice, rezultă că definițiile și rezultatele privind șirurile în spațiile metrice rămân valabile și în spațiile normate. Astfel, dacă  $X$  este un spațiu normat, atunci un șir  $\{x_n\}$  de elemente din  $X$  converge la elementul  $x \in X$ , dacă și numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

**Definiția 3.2.2.** Orice spațiu normat și complet se numește spațiu Banach.

Așa cum s-a arătat în §1, spațiile  $\ell^n$ ,  $\leq$  și  $B(E)$  sunt complete, deci sunt spații Banach.

### 3.3. Spații Hilbert

Spațiul Hilbert este un caz particular de spațiu Banach, în care norma provine dintr-un produs scalar.

**Definiția 3.3.1.** Fie  $E$  un spațiu vectorial peste corpul  $K$ . Se numește produs scalar o aplicație  $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietățile:

$$(i) \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}, \forall x, y \in E \text{ dacă } K = \mathbb{C} \text{ și}$$

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}, \forall x, y \in E \text{ dacă } K = \mathbb{R}.$$

$$(ii) \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in E \text{ și } \forall \lambda, \mu \in K.$$

$$(iii) \langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in E \text{ și } \langle x, x \rangle = 0 \text{ dacă și numai dacă } x = 0_E.$$

Perechea  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se numește spațiu prehilbert.

**Observația 3.3.1.**  $\langle x, 0_E \rangle = 0, \forall x \in E$  (unde cu  $0_E$  am notat elementul neutru la adunare din  $E$  și cu 0 numărul zero din  $K$ ).

$$\text{Într-adevăr, } \langle x, 0_E \rangle = \langle x, 0 \cdot 0_E \rangle = 0 \langle x, 0_E \rangle = 0.$$

**Teorema 3.3.1. (inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz)**

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \forall x, y \in E \quad (3.10)$$

*Demonstrație*

Dacă  $y = 0_E$ , atunci  $\langle x, y \rangle = 0$ , deci inegalitatea (1) este evident satisfăcută.

Fie  $y \neq 0_E$ . Pentru  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  avem:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle &= \langle x, x - \lambda y \rangle - \lambda \langle y, x - \lambda y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle - \overline{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + \overline{\lambda} \lambda \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

În particular, pentru  $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$  avem

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot \overline{\langle x, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle \langle y, y \rangle} \cdot \langle y, y \rangle$$

Deoarece  $\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} = |\langle x, y \rangle|^2$ , mai departe obținem:

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}, \text{ deci } |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

**Corolar.** Orice spațiu prehilbert este un spațiu normat.

*Demonstrație*

Pentru  $\forall x \in E$  notăm cu  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Evident,

$$\|x\| \geq 0 \text{ și } \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ și } \forall x \in X.$$

Rămâne să dovedim și proprietatea (iii) din Definiția 3.2.1. Pentru  $\forall x, y \in E$  avem

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2 |\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Ținând seama de inegalitatea (1) obținem:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\leq \sqrt{\langle x, x \rangle + 2 \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle} = \\ &= \sqrt{\|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2} = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Rezultă  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$ .

**Definiția 3.3.2.** Un spațiu prehilbert complet se numește spațiu Hilbert.

**Exemple**

1. Spațiul  $\mathbb{C}^n$  este un spațiu Hilbert.

Într-adevăr, observăm pentru început că  $\square^n$  este un spațiu vectorial peste  $\Upsilon$  în raport cu operațiile:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \forall \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \square^n.$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \quad \forall \quad \lambda \in \Upsilon.$$

Elementul neutru la adunare este  $0_E = (0, 0, \dots, 0)$ . Dacă notăm cu

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (3.11)$$

atunci formula (3.11) definește un produs scalar pe  $\square^n$ , iar formula

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \forall \quad x \in \square^n \quad (3.12)$$

definește norma euclidiană pe  $\square^n$ . Așadar,  $\square^n$  este un spațiu prehilbertian. Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz capătă următoarea formă:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right). \quad (3.13)$$

Pe spațiul  $\square^n$  s-a definit în subcap 3.2 și o altă normă, care nu provine dintr-un produs scalar și anume:

$$\|x\|_\infty = \max \{ |x_i|; 1 \leq i \leq n \}.$$

2. Fie  $M_{m,n}(\square)$  spațiul vectorial al matricelor cu  $m$  linii și  $n$  coloane cu elemente din  $\Upsilon$ .

Dacă  $A = (a_{ij})$  și  $B = (b_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq m$  și  $1 \leq j \leq n$ , atunci formula

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

definește un produs scalar, deci  $M_{m,n}(\square)$  este un spațiu prehilbertian.

Norma unei matrice este deci:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}, \quad \forall \quad A \in M_{m,n}(\square).$$

Spațiul  $M_{m,n}(\square)$  se poate identifica cu spațiul  $\square^{mn}$  prin următoarea aplicație

$$\varphi : M_{m,n}(\square) \rightarrow \square^{mn}, \quad \varphi(A) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{mn}),$$

pentru



$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\square).$$

Se observă imediat că aplicația  $\varphi$  are următoarele proprietăți:  $\varphi$  este bijectivă,  $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$  și  $\varphi(\lambda A) = \lambda \varphi(A)$ ,  $\forall A, B \in M_{m,n}(\square)$  și  $\forall \lambda \in \Upsilon$ , de unde rezultă că spațiul  $M_{m,n}(\square)$  și  $\square^{mn}$  sunt izomorfe din punct de vedere algebric. Avem de asemenea:

$$\|\varphi(A)\| = \|A\|, \forall A \in M_{m,n}(\square),$$

de unde rezultă că cele două spații sunt izomorfe și din punct de vedere topologic. Cum spațiul  $\square^{mn}$  este Hilbert, rezultă că și spațiul  $M_{m,n}(\square)$  este un spațiu Hilbert.

3. Fie  $C([a,b])$  spațiul vectorial al funcțiilor  $f: [a,b] \subset \square \rightarrow \square$ , continue pe  $[a,b]$ . Pentru  $\forall f, g \in C([a,b])$  notăm

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (3.14)$$

Se verifică imediat că sunt satisfăcute proprietățile (i) și (ii) din Definiția 3.3.1 a produsului scalar. Este de asemenea evident că  $\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$ ,  $\forall f \in C([a,b])$ . Faptul că  $\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)dx = 0$  dacă și numai dacă  $f$  este identic nulă pe  $[a,b]$ , rezultă din următorul rezultat cunoscut din liceu: dacă  $g: [a,b] \rightarrow \Upsilon$  este continuă și pozitivă, neidentic nulă pe  $[a,b]$ , atunci  $\int_a^b g(x)dx > 0$ . Așadar, formula (3.14) definește un produs scalar pe  $C([a,b])$ . Norma euclidiană va fi:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} = 0, \forall f \in C([a,b]). \quad (3.15)$$

Pe spațiul  $C([a,b])$  se poate introduce și norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [a,b]\} \quad (3.16)$$

Deoarece orice funcție continuă pe  $[a,b]$  este mărginită, rezultă

$$C([a,b]) \subset B([a,b])$$

și evident norma (3.16) este restricția la  $C([a,b])$  a normei (3.12).

Spațiul  $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$  este spațiu Banach. Remarcăm că spațiul  $C([a,b])$  nu este complet în raport cu norma (3.15), deci nu este spațiu Hilbert.

Într-adevăr, dacă considerăm șirul de funcții continue:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } -1 \leq x \leq 0 \\ nx & \text{dacă } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{dacă } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{atunci: } \|f_{n+p} - f_n\|_2^2 = \int_0^{\frac{1}{n+p}} p^2 x^2 dx + \int_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 dx < \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{n} = \frac{5}{3n}, \forall p.$$

Rezultă că  $\{f_n\}$  este fundamental în raport cu norma  $\|\cdot\|_2$ . Pe de altă parte observăm că  $\{f_n\}$  nu converge în  $C([-1,1])$  în raport cu această normă.

Într-adevăr, dacă  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă, atunci avem:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-1}^0 f^2(x) dx + \int_0^{\frac{1}{n}} [nx - f(x)]^2 dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 [1 - f(x)]^2 dx$$

Dacă presupunem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$ , rezultă că

$$\int_{-1}^0 f^2(x) dx + \int_0^1 [1 - f(x)]^2 dx = 0 \text{ și mai departe că } f(x) = 0, \forall x \in [-1, 0] \text{ și } f(x) = 1, \forall x \in (0, 1] \text{ ceea ce contrazice faptul că } f \text{ este continuă pe } [-1, 1].$$

Rezultă  $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ , dar  $f \notin C([-1,1])$  deci  $(C([-1,1]), \|\cdot\|_2)$  nu este complet.

### 3.4. Serii în spații normate

**Definiția 3.4.1.** Fie  $X$  un spațiu normat și  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  un șir de elemente din  $X$ .

Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , notăm cu  $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

Perechea  $(\{u_n\}_{n \geq 1}, \{s_n\}_{n \geq 1})$  se numește serie de elemente din spațiul

normat  $X$  și se notează  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  se numește convergentă dacă șirul sumelor parțiale  $\{s_n\}$  este convergent, deci dacă  $\exists s \in X$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - s\| = 0$ . În acest caz  $s$  se numește suma seriei și notăm  $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

**Teorema 3.4.1.** Fie  $X$  un spațiu Banach și  $\{u_n\}$  un șir de elemente din  $X$ .

Condiția necesară și suficientă ca seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  să fie convergentă este ca  $\forall \varepsilon > 0$

să  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\forall n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$  să avem  $\|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}\| < \varepsilon$ .

*Demonstrație*

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă  $\Leftrightarrow \{s_n\}$  este convergent  $\Leftrightarrow \{s_n\}$  este fundamental,

deci  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\forall n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$  avem

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}\| < \varepsilon.$$

**Definiția 3.4.2.** O serie de elemente din spațiul normat  $X$  se numește absolut

convergentă dacă seria cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$  este convergentă.

**Teorema 3.4.2.** Condiția necesară și suficientă ca un spațiu normat  $X$  să fie spațiu Banach, este ca orice serie absolut convergentă de elemente din  $X$  să fie convergentă.

*Demonstrație*

**Necesitate.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie absolut convergentă. Atunci  $\forall \varepsilon > 0, \exists$

$n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\|u_{n+1}\| + \dots + \|u_{n+p}\| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ . În continuare avem:

$$\|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}\| \leq \|u_{n+1}\| + \dots + \|u_{n+p}\| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

deci  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă conform Teoremei 3.4.1.

**Suficiența.** Fie  $\{x_n\}$  un șir fundamental de elemente din  $X$ . Atunci există un subșir  $\{x_{n_k}\}$  cu proprietatea:

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}, \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}^* \quad (3.17)$$

(vezi raționamentul din demonstrația Teoremei 1.2.1).

Deoarece seria  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$  este convergentă, din (3.17) rezultă că seria

$\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$  este absolut convergentă, deci convergentă, conform ipotezei noastre. Observăm însă că șirul sumelor parțiale al acestei serii coincide cu subșirul  $\{x_{n_k}\}$ , deci  $\exists x \in X$  astfel încât  $\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  cu proprietatea:

$$\|x_{n_k} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \quad k \geq n'_\varepsilon.$$

Pe de altă parte, șirul  $\{x_n\}$  este fundamental, deci  $\exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  cu proprietatea:

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \quad n, m \geq n''_\varepsilon.$$

Fie  $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ ,  $n \geq n_\varepsilon$  și  $k \geq n_\varepsilon$ . Atunci

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de unde rezultă  $x_n \rightarrow x$ .

Așadar, am arătat că orice șir fundamental este convergent, deci  $X$  este spațiu Banach.

### Exemple

1. Fie  $X = \mathbb{R}^n$  și  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  o serie de elemente din  $\mathbb{R}^n$ . Fiecare element  $x_k$  va

fi de forma:  $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ .

Șirul sumelor parțiale  $\{s_k\}$  este de forma

$$s_k = (s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kn}) \text{ unde } s_{ki} = x_{1i} + x_{2i} + \dots + x_{ki}.$$

Din Teorema 3.1.1 rezultă că  $\{s_k\}$  este convergent dacă și numai dacă șirul de numere reale  $\{s_{ki}\}$  este convergent,  $\forall \quad i = \overline{1, n}$ . Prin urmare, seria de vectori

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  este convergentă în  $\mathbb{R}^n$ , dacă și numai dacă seriile de numere reale  $\sum_{k=1}^{\infty} x_{ki}$

sunt convergente în  $\mathbb{R}$ ,  $\forall \quad i = \overline{1, n}$ .

Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n}, \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$  este convergentă în  $\square^2$  și are suma  $s = (1, \ln 2) \in \square^2$ ,

deoarece  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ .

2. Fie  $X = M_{m,n}(\square)$  spațiul Banach al matricelor cu  $m$  linii și  $n$  coloane cu elemente din  $\Upsilon$ . Așa cum am mai remarcat, acest spațiu se poate identifica cu spațiul

$\square^{mn}$ . Rezultă că o serie de matrice  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ , unde pentru  $\forall k \in \square^*$ ,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{1n}^{(k)} \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & a_{mn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

este convergentă, dacă și numai dacă seriile de numere reale  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$  sunt convergente în  $\Upsilon$  pentru  $\forall i = \overline{1, m}$  și  $\forall j = \overline{1, n}$ .

De exemplu, seria  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ , unde

$$A_k = \frac{1}{k+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & -\frac{1}{k+2} & (-1)^{k-1} \\ \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k} & (k+1) \ln \left[ 1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \right] \end{pmatrix}$$

este convergentă în  $M_{23}(\square)$  și are suma

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 - \ln 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{11}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{22}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

În mod analog avem

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{21}^{(k)} = -\sum_{k=1}^{\infty} a_{12}^{(k)} = \frac{1}{2}.$$

În continuare observăm că

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{13}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = 1 - \ln 2.$$

În sfârșit, dacă notăm cu  $a_{23}^{(k)}$  suma parțială de ordinul  $k$  a seriei

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{23}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \right],$$

atunci

$$s_{23}^{(k)} = \ln \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{k+1+(-1)^{k-1}}{k+1} = \begin{cases} \ln 1 & \text{dacă } k = 2p \\ \ln \frac{2p+1}{2p} & \text{dacă } k = 2p-1. \end{cases}$$

Rezultă că  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{23}^{(k)} = 0$ , deci  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{23}^{(k)} = 0$ .

**Observația 3.4.1.** Într-un spațiu Banach pot exista serii convergente care nu sunt absolut convergente. Într-adevăr, dacă vom considera din nou seria precedentă, despre care s-a arătat că este convergentă, observăm că

$$\|A_k\| = \frac{1}{k+1} \sqrt{\frac{2}{k^2} + \frac{2}{(k+2)^2} + 1 + (k+1)^2 \ln^2 \left[ 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right]} \geq \frac{1}{k+1}.$$

Cum seria  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$  este divergentă, rezultă că seria  $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$  este divergentă,

deci seria  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$  nu este absolut convergentă.

3. Fie  $X = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$  o serie de numere complexe, unde  $z_n = x_n + i y_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Deoarece șirul sumelor parțiale este

$$s_n = (x_1 + \dots + x_n) + i(y_1 + \dots + y_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

din Teorema 3.1.2 rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  este convergentă în  $\mathbb{C}$  dacă și numai dacă

seriile de numere reale  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  sunt convergente în  $\mathbb{R}$ .

4. Fie  $X = B(E)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  o serie de funcții din  $B(E)$  și  $s_n = u_1 + \dots + u_n$ ,

$n \in \mathbb{N}$ . Deoarece, așa cum am văzut,  $\{s_n\}$  este convergent în  $B(E)$  dacă și numai

dacă  $\{s_n\}$  este uniform convergent pe  $E$ , rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă în  $B(E)$  în raport cu norma  $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)|; x \in E\}$ ,  $\forall f \in B(E)$ , dacă și numai dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este uniform convergentă pe  $E$ .

### 3.5. Funcții elementare. Formulele lui Euler

**Observația 3.5.1.** Demonstrația Teoremei 1.9.2 rămâne valabilă și pentru serii de numere complexe. Prin urmare, dacă seriile de numere complexe  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  sunt absolut convergente și au sumele  $U$ , respectiv  $V$ , atunci orice serie produs a lor este absolut convergentă și are suma egală cu  $UV$ .

În continuare definim funcțiile de variabilă complexă  $e^z$ ,  $\cos z$  și  $\sin z$  ca sumele următoarelor serii de numere complexe:

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (3.18)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (3.19)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (3.20)$$

Definițiile au sens, deoarece seriile din dreapta sunt absolut convergente pe  $\leq$ , așa cum rezultă imediat din criteriul raportului. Cum  $\leq$  este spațiu Banach, din Teorema 3.4.2 rezultă că aceste serii sunt convergente pr orice  $z \in \leq$ .

**Teorema 3.5.1.**  $e^z \cdot e^u = e^{z+u}$ ,  $\forall u, z \in \leq$ .

*Demonstrație*

În conformitate cu definiția (3.18) a funcției exponențiale avem:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots$$

În virtutea Observației 3.5.1, oricum am înmulți aceste serii, obținem o serie absolut convergentă, a cărei sumă este egală cu  $e^z \cdot e^u$ .

Folosind produsul de tipul I rezultă:

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^u &= 1 + \left( \frac{z}{1!} + \frac{u}{1!} \right) + \left( \frac{z^2}{2!} + \frac{zu}{1!1!} + \frac{u^2}{2!} \right) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{z^{n-k}}{(n-k)!k!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} z^{n-k} \cdot u^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n C_n^k z^{n-k} \cdot u^k \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+u)^n}{n!} = e^{z+u}. \end{aligned}$$

Dacă în definiția (3.18) a funcției exponențiale înlocuim  $z$  cu  $iz$  obținem

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) + i \left( \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

Așadar, au loc formulele

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (3.21)$$

Formulele (3.21) se pot pune sub forma echivalentă.

$$\begin{cases} \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad z \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (3.22)$$

Formulele (3.22) se numesc formulele lui Euler. Din Teorema 3.5.1 și formulele lui Euler rezultă imediat:

$$\begin{cases} \sin(z+u) = \sin z \cos u + \cos z \sin u \\ \cos(z+u) = \cos z \cos u - \sin z \sin u \end{cases} \quad (3.23)$$

Dacă în definițiile (3.18), (3.19) și (3.20) luăm  $z = x \in \mathbb{R}$ , obținem:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (3.18')$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (3.19')$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.20')$$

Ținând seama de dezvoltările în serie Mac Laurin a funcțiilor elementare studiate în subcap. 2.3, constatăm că funcțiile de variabilă complexă  $e^z$ ,  $\cos z$  și



$\sin z$  definite în (3.18), (3.19) și (3.20) sunt generalizări ale funcțiilor de variabilă reală  $e^x$ ,  $\cos x$  și  $\sin x$ . Așadar, restricția la  $\mathbb{Y}$  a funcției  $z \rightarrow e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  coincide cu funcția exponențială reală  $x \rightarrow e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cunoscută din liceu etc.

Din Teorema 3.5.1 și formulele (3.21) rezultă:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \forall \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

În particular avem:

$$e^{i2k\pi} = 1, \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}.$$

În sfârșit, funcția  $z = \ln w$ ,  $z \in \mathbb{C}$  se definește ca inversa funcției  $w = e^z$ ,  $w \in \mathbb{C}^*$ .

Dacă  $w \neq 0$  și  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , atunci din ecuația  $w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$  rezultă  $e^x = r = |w|$  și  $y = \theta + 2k\pi = \arg w + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Prin urmare avem:

$$z = \ln w = \ln |w| + i \arg w + i \cdot 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Din punct de vedere al teoriei funcțiilor complexe,  $\ln w$  are o infinitate de valori dacă  $w \neq 0$ . În particular,  $\ln 1 = 2k\pi i$ ,  $\forall \quad k \in \mathbb{Z}$ , spre deosebire de analiza reală, unde  $\ln 1 = 0$  (are o singură valoare).

### 3.6. Funcții de matrice

Fie  $M_n(\mathbb{C})$  spațiul vectorial al matricelor pătrate de ordinul  $n$  cu elemente din  $\mathbb{C}$ . Așa cum am văzut în subcap. 3.4 acest spațiu se poate identifica cu spațiul  $\mathbb{C}^{n^2}$ ;  $M_n(\mathbb{C})$  este un spațiu Banach (chiar Hilbert) în raport cu norma.

$$\|A\| = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

**Lema 3.6.1.** Pentru orice  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , avem:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \text{și} \quad \|A^k\| \leq \|A\|^k, \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}^* \quad (3.24)$$

*Demonstrație*

Dacă notăm cu  $C = AB$ , atunci elementele matricei  $C$  sunt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad \forall \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem:

$$c_{ij}^2 = \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right). \quad (3.25)$$

Sumând în (3.25) după indicele  $j$  rezultă:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \|B\|^2. \quad (3.26)$$

Sumând acum după  $i$  obținem:

$$\|C\|^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \|B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2, \text{ deci } \|C\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Inegalitatea (3.26) rezultă imediat din (3.25) prin inducție completă.

Fie seria de puteri  $\sum_{k=1}^n a_k x^k$ ,  $a_k \in \Upsilon$  pentru  $\forall k \in \mathbb{N}$  și fie  $f$  suma sa. Dacă notăm cu  $\rho$  raza sa de convergență, atunci avem:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k, \text{ dacă } \|x\| < \rho. \quad (3.27)$$

Pentru orice  $A \in M_n(\square)$  considerăm seria de matrice

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k + \dots \quad (3.28)$$

unde cu  $I_n$  am notat matricea unitate de ordinul  $n$ .

**Teorema 3.6.1.** *Seria (3.28) este convergentă pentru orice  $A \in M_n(\square)$  cu proprietatea  $\|A\| < \rho$ .*

*Demonstrație*

Deoarece  $M_n(\square)$  este un spațiu Banach, din Teorema 3.4.2 rezultă că este suficient să arătăm că seria (3.28) este absolut convergentă pentru  $\|A\| < \rho$ . Fie deci  $A \in M_n(\square)$  cu proprietatea  $\|A\| < \rho$ , și fie  $\|A\| < r < \rho$ . Din Lema 3.6.1 rezultă:

$$\|a_k A^k\| = |a_k| \|A^k\| \leq |a_k| \|A\|^k < |a_k| r^k.$$

Cum  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$  este convergentă, din Criteriul I de comparație rezultă că

seria  $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k A^k\|$  este convergentă, deci seria (3.28)  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$  este convergentă (s-a folosit notația  $A^0 = E$ ).

**Definiția 3.6.1.** *Se numește funcția de matrice definită de  $f$  și se notează cu  $f(A)$ , suma seriei (3.28). Așadar, avem:*

$$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k + \dots, \quad \forall A \in M_n(\square), \|A\| < \rho.$$

Cea mai importantă funcție de matrice este funcția exponențială de matrice. Deoarece seria  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  are raza de convergență  $\rho = \infty$ , rezultă că avem:

$$e^A = I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots, \quad \forall A \in M_n(\square). \quad (3.29)$$

**Teorema 3.6.2.** *Funcția exponențială de matrice are următoarele proprietăți:*

- (i)  $e^0 = I_n$
- (ii)  $e^{\lambda I_n} = e^\lambda I_n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$
- (iii) Dacă  $AB = BA$ , atunci  $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A = e^{A+B}$
- (iv) Matricea  $e^A$  este nesingulară și  $(e^A)^{-1} = e^{-A}, \quad \forall A \in M_n(\square)$
- (v) Pentru orice matrice nesingulară  $C \in M_n(\square)$  avem

$$e^A = C \cdot e^{C^{-1}AC} \cdot C^{-1}, \quad \forall A \in M_n(\square).$$

*Demonstrație*

Proprietățile (i) și (ii) sunt evidente din (3.29). Demonstrația proprietății (iii) este identică cu demonstrația Teoremei 3.5.1, cu observația suplimentară că dacă  $AB = BA$ , atunci formula binomului lui Newton funcționează și pentru matrice, deci are loc formula:

$$(A+B)^k = \sum_{l=0}^k C_k^l A^{k-l} B^l.$$

Proprietatea (iv) rezultă din observația  $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = I_n$ . Pentru a demonstra proprietatea (v) observăm pentru început că avem:

$$(C^{-1}AC)^k = C^{-1}A^kC, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.30)$$

Într-adevăr, identitatea (3.30) se demonstrează imediat prin inducție matematică. Ținând seama de (3.30) rezultă:

$$e^{C^{-1}AC} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (C^{-1}AC)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C^{-1}A^kC = C^{-1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) C = C^{-1}e^A C.$$

Așadar, avem  $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$ . Amplificând în această egalitate la stânga cu  $C$  și la dreapta cu  $C^{-1}$  obținem  $C \cdot e^{C^{-1}AC} \cdot C^{-1} = e^A$ , deci (v).

### Exemple

1. Dacă matricea  $A$  are forma diagonală, adică dacă

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Rezultă că

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

2. Fie  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze  $e^A$ .

În prima fază aducem matricea la forma diagonală. Ecuația caracteristică este  $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ , iar valorile proprii sunt  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 5$ . Vectorii proprii sunt  $x_1 = (1, 3)$ ,  $x_2 = (1, -1)$ . În raport cu baza  $x_1, x_2$  matricea  $A$  capătă forma diagonală

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Matricea de trecere este } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ iar } C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Așadar, avem  $D = C^{-1}AC$ . Din Teorema 3.9.2, (v) rezultă

$$e^A = Ce^DC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e + 3e^5 & e - e^5 \\ 3e - 3e^5 & 3e + 3e^5 \end{pmatrix}$$

3. Să se calculeze  $\sin A$ , dacă  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \sin A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (CDC^{-1})^{2k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} CD^{2k+1}C^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin 1 & 0 \\ 0 & \sin 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin 1 + 3\sin 5 & \sin 1 - \sin 5 \\ 3\sin 1 - 3\sin 5 & 3\sin 1 + \sin 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

În încheierea acestui paragraf menționăm că funcția exponențială de matrice este utilă în studiul sistemelor de ecuații diferențiale liniare.

### 3.7. Elemente de topologie în $\square^n$

**Definiția 3.7.1.** Fie  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \square^n$  și  $r > 0$ . Se numește bila deschisă (închisă) de centru  $a$  și rază  $r$  mulțimea

$$B(a, r) = \{x \in \square^n; \|x - a\| < r\}$$

$$\left[ \check{B}(a, r) = \{x \in \square^n; \|x - a\| \leq r\} \right].$$

Cum pe mulțimea  $\square^n$  am introdus două norme ( $\|\cdot\|_2$  și  $\|\cdot\|_\infty$ ) rezultă că pe  $\square^n$  avem două tipuri de bile deschise (închise) și anume:

$$B_2(a, r) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \square^n; \|x - a\|_2 < r\} =$$

$$= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \square^n; (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2\}.$$

$$B_\infty(a, r) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \square^n; \|x - a\|_\infty < r\} =$$

$$= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \square^n; |x_1 - a_1| < r, \dots, |x_n - a_n| < r\}.$$

(respectiv  $\check{B}_2(a, r)$  și  $\check{B}_\infty(a, r)$ ).

#### Exemple:

1. Fie  $a \in \mathbb{R}$  și  $r > 0$ . Deoarece pe  $\mathbb{R}$  avem  $\|x\|_2 = \|x\|_\infty = |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  rezultă că:

$$B_2(a, r) = B_\infty(a, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < r\} = (a - r, a + r).$$

Din punct de vedere geometric, pe  $\mathbb{R}$ , bila deschisă cu centrul în  $a$  și de rază  $r$  reprezintă intervalul deschis  $(a - r, a + r)$ .

2. Fie  $a = (a_1, a_2) \in \square^2$  și  $r > 0$ .

$$B_2(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \square^2; (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$$

și

$$B_\infty(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \square^2; |x_1 - a_1| < r \text{ și } |x_2 - a_2| < r\}.$$

Din punct de vedere geometric  $B_2(a, r)$  reprezintă interiorul cercului cu centrul în  $a = (a_1, a_2)$  și de rază  $r$  iar  $B_\infty(a, r)$  este interiorul pătratului cu centrul în  $a = (a_1, a_2)$  și de latură  $2r$ .

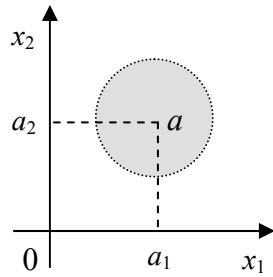


Fig. 1

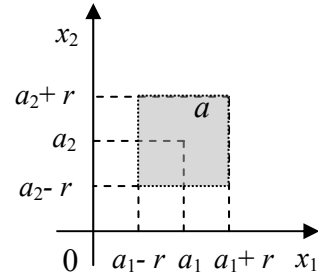


Fig. 2

3. În  $\square^3$ ,  $B_2(a, r)$  reprezintă interiorul sferei cu centrul în  $a = (a_1, a_2, a_3) \in \square^3$  și de rază  $r$ , iar  $B_\infty(a, r)$  reprezintă interiorul cubului cu centrul în  $a$ , fețele paralele cu planele de coordonate și de muchie  $2r$ .

În general, în  $\square^n$  vom numi  $B_2(a, r)$  sfera  $n$ -dimensională și  $B_\infty(a, r)$  cubul  $n$ -dimensional.

**Observația 3.7.1.** Între cele două tipuri de bile din  $\square^n$  au loc incluziunile:

$$B_\infty\left(a, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r).$$

Într-adevăr, dacă  $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_\infty\left(a, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ , atunci  $|x_i - a_i| < \frac{r}{\sqrt{n}}$ ,

$\forall i = \overline{1, n}$ , de unde rezultă că:

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < \cancel{r} \cdot \frac{r^2}{\cancel{r}} = r^2, \text{ deci } x \in B_2(a, r).$$

Pe de altă parte, dacă

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in B_2(a, r),$$

atunci  $(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2$ .

Cum  $|x_i - a_i| \leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < r, \forall i = \overline{1, n}$  rezultă că

$$x \in B_\infty(a, r).$$

În cazul particular  $n = 2$ , incluziunile din Observația 3.7.1. sunt reprezentate geometric în Fig. 3.

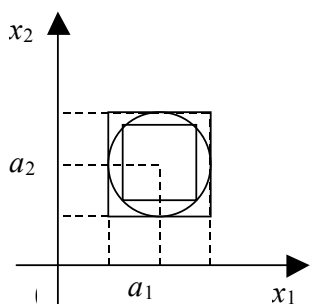


Fig. 3

**Definiția 3.7.2.** Se numește *vecinătate a punctului*  $a \in \mathbb{R}^n$  orică *mulțime*  $V \subset \mathbb{R}^n$  cu proprietatea că există  $r > 0$  astfel încât  $V \supset B(a, r)$ .

Conform acestor definiții, pe  $Y$ , o vecinătate a punctului  $a \in Y$ , este orice mulțime  $V \subset Y$  care conține un interval deschis  $(a - r, a + r)$ , unde  $r > 0$ . În particular orice interval deschis  $(a - r, a + r)$  este

vecinătate a punctului  $a \in Y$ .

S-ar părea că în  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) există două tipuri de vecinătăți pentru un punct și anume: vecinătăți ce conțin bile de tipul  $B_2(a, r)$ , respectiv vecinătăți ce conțin bile de tipul  $B_\infty(a, r)$ . Din Observația 3.7.1. rezultă că cele două tipuri de vecinătăți coincid. De aceea în continuare, prin vecinătate a punctului  $a \in \mathbb{R}^n$ , înțelegem orice mulțime din  $\mathbb{R}^n$  care conține fie o sferă n-dimensională deschisă, fie un cub n-dimensional deschis.

Mulțimea tuturor vecinătăților punctului  $a \in \mathbb{R}^n$  o notăm cu  $V(a)$ .

**Propoziția 3.7.1.** Familia  $V(a)$  are următoarele proprietăți:

- 1)  $a \in V$  pentru orice  $V \in V(a)$
- 2) Dacă  $V \in V(a)$  și  $U \supset V$ , atunci  $U \in V(a)$ .
- 3) Dacă  $a_1 \neq a_2$  atunci  $\exists V_1 \in V(a_1)$  și  $\exists V_2 \in V(a_2)$  astfel încât  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .
- 4) Dacă  $V_i \in V(a), i = \overline{1, m}$ , atunci  $\bigcap_{i=1}^m V_i \in V(a)$ .

5) Pentru orice  $V \in \mathcal{V}(a)$ ,  $\exists W \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât  $V \in \mathcal{V}(b)$  pentru orice  $b \in W$ .

*Demonstrație*

Proprietățile 1) și 2) sunt evidente. Dacă  $a_1 \neq a_2$  atunci  $\|a_1 - a_2\| = r > 0$ . Se observă imediat că  $B\left(a_1; \frac{r}{3}\right) \cap B\left(a_2; \frac{r}{3}\right) = \Phi$ , deci am demonstrat 3).

Fie  $V_i \in \mathcal{V}(a)$  și fie  $r_i > 0$  astfel încât  $V_i \supset B(a, r_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Dacă notăm cu  $r = \min\{r_i; 1 \leq i \leq m\}$ , atunci  $\bigcap_{i=1}^m V_i \supset B(a; r)$ , de unde rezultă că  $\bigcap_{i=1}^m V_i \in \mathcal{V}(a)$ .

În sfârșit, fie  $V \in \mathcal{V}(a)$  și  $r > 0$  astfel încât  $V \supset B(a, r)$ . Dacă notăm cu  $W = B\left(a, \frac{r}{2}\right)$ , atunci pentru  $\forall b \in W$  și  $\forall x \in B\left(b, \frac{r}{2}\right)$  avem  $\|x - a\| \leq \|x - b\| + \|b - a\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ , de unde rezultă că  $B\left(b, \frac{r}{2}\right) \subset V$ , deci  $V \in \mathcal{V}(b)$ .

**Observația 3.7.2.** Un șir  $\{x_k\}$  de elemente din  $\square^n$  este convergent în  $\square^n$  și are limita  $l \in \square^n$  dacă și numai dacă  $\forall V \in \mathcal{V}(l)$ ,  $\exists$  un rang  $k_V \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $x_k \in V$  pentru orice  $k \geq k_V$ . (Cu alte cuvinte, în afara oricărei vecinătăți  $V$  a lui  $l$  se află un număr finit de termeni ai șirului).

Într-adevăr, fie  $V \in \mathcal{V}(l)$ , și fie  $\exists \varepsilon > 0$  astfel încât  $V \supset B(l, \varepsilon)$ . Dacă  $x_k \xrightarrow{\square^n} l$ , atunci  $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  cu proprietatea că  $\|x_k - l\| < \varepsilon$  pentru orice  $k \geq k_\varepsilon$ . Acest lucru revine la  $x_k \in B(l, \varepsilon) \subset V$ ,  $\forall k \geq k_\varepsilon$ .

Reciproc, fie  $\varepsilon > 0$  și fie  $V = B(l, \varepsilon)$ . Dacă  $\exists k_V = k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $x_k \in V$  pentru orice  $k \geq k_\varepsilon$ , atunci  $\|x_k - l\| < \varepsilon$  pentru orice  $k \geq k_\varepsilon$ , deci  $x_k \xrightarrow{\square^n} l$ .

**Definiția 3.7.3.** Un punct  $a$  se numește punct interior pentru mulțimea  $A \subset \square^n$  dacă există  $V \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât  $V \subset A$ . Mulțimea tuturor punctelor interioare ale mulțimii  $A$  se numește interiorul mulțimii  $A$  și se notează cu  $\overset{\circ}{A}$ . Evident  $\overset{\circ}{A} \subset A$ . Mulțimea  $A$  se numește deschisă dacă  $A = \overset{\circ}{A}$ .

**Observația 3.7.3.** Pentru orice  $a \in \square^n$  și orice  $r > 0$  mulțimea  $B(a, r)$  este deschisă. Într-adevăr, fie  $b \in B(a, r)$  și fie  $0 < \varepsilon < r - \|b - a\|$ .



Dacă  $x \in B(a, \varepsilon)$  atunci  $\|x - a\| \leq \|x - b\| + \|b - a\| < \varepsilon + \|b - a\| < r$ . Rezultă că  $x \in B(a, r)$ , deci  $B(a, \varepsilon) \subset B(a, r)$ . Așadar orice punct  $b \in B(a, r)$  este punct interior al mulțimii  $B(a, r)$ , deci  $B(a, r)$  este o mulțime deschisă.

### Exemple

1. Dacă  $X = \mathbb{Y}$ , atunci orice interval simetric  $(a - r, a + r)$  este o mulțime deschisă.

Fie  $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{Y}$  un interval deschis oarecare. Dacă notăm cu  $a = \frac{\alpha + \beta}{2}$  și cu  $r = \frac{\beta - \alpha}{2}$ , atunci  $(\alpha, \beta) = (a - r, a + r)$ . Rezultă că orice interval deschis din  $\mathbb{Y}$  este o mulțime deschisă.

2. Dacă  $X = \mathbb{R}^2$ , atunci interiorul oricărui cerc (pătrat) este o mulțime deschisă.

3. Dacă  $X = \mathbb{R}^3$ , atunci interiorul oricărei sfere (cub) este o mulțime deschisă.

Proprietățile mulțimilor deschise sunt puse în evidență de următoarea propoziție.

### Propoziția 3.7.2.

- (i) O reuniune oarecare de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.
- (ii) Orice intersecție finită de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.
- (iii) Mulțimea  $\emptyset$  și mulțimea vidă  $\emptyset$  sunt mulțimi deschise.

#### Demonstrație

(i) Fie  $\{D_i\}_{i \in I}$  o familie de mulțimi deschise și fie  $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ . Dacă  $a \in D$ , atunci există  $i_0 \in I$  astfel încât  $a \in D_{i_0}$ . Cum  $D_{i_0}$  este deschisă, rezultă că există  $V \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât  $V \subset D_{i_0}$ . Evident  $V \subset D$ , de unde rezultă că  $x = a$  este un punct interior pentru  $D$ , deci  $D$  este deschisă.

(ii) Fie  $D_1, \dots, D_m$  mulțimi deschise și  $A = \bigcap_{i=1}^m D_i$ . Dacă  $a \in A$ , atunci  $a \in D_i$  oricare ar fi  $i \in I$ . Cum  $D_i$  este deschisă rezultă că există  $V_i \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât  $V_i \subset D_i$ . Dacă notăm cu  $V = \bigcap_{i=1}^m V_i$ , atunci  $V \in \mathcal{V}(a)$  și  $V \subset A$ . Rezultă că  $x = a$  este punct interior pentru  $A$ , deci  $A$  este deschisă. Proprietatea (iii) este evidentă.

Propoziția 3.7.2. ne permite să dăm exemple mai variate de mulțimi deschise. De exemplu în  $\mathbb{Y}$ , orice reuniune de intervale deschise este o mulțime deschisă. În

$\square^2$ , diverse reuniuni și intersecții de interioare de cercuri sau pătrate sunt exemple de mulțimi deschise etc.

**Definiția 3.7.4.** Un punct  $a \in \square^n$  se numește punct aderent pentru mulțimea  $A \subset \square^n$  dacă oricare ar fi  $V \in \mathcal{V}(a)$  rezultă  $V \cap A \neq \emptyset$ . Mulțimea tuturor punctelor aderente ale mulțimii  $A$  se notează cu  $\bar{A}$  și se numește închiderea mulțimii  $A$ . Evident  $A \subset \bar{A}$ . Mulțimea  $A$  se numește închisă dacă  $A = \bar{A}$ .

**Teorema 3.7.1.** Condiția necesară și suficientă ca mulțimea  $A \subset \square^n$  să fie închisă este ca mulțimea sa complementară  $CA = \square^n \setminus A$  să fie deschisă.

*Demonstrație*

**Necesitatea.** Presupunem că mulțimea  $A$  este închisă și demonstrăm că mulțimea  $CA$  este deschisă.

Dacă  $b \in CA$ , atunci  $b \notin A = \bar{A}$ . Prin urmare,  $b$  nu este punct aderent pentru  $A$ . Rezultă că există  $V \in \mathcal{V}(b)$ , astfel încât  $V \cap A = \emptyset$ , deci  $V \subset CA$ . Așadar,  $b$  este punct interior pentru  $CA$ , deci  $CA$  este deschisă.

**Suficiența.** Presupunem că mulțimea  $CA$  este deschisă și demonstrăm că  $A$  este închisă. Aceasta revine la a arăta că  $\bar{A} \subset A$ , ceea ce este echivalent cu  $CA \subset C\bar{A}$ .

Fie deci  $b \in CA$ . Cum  $CA$  este deschisă, rezultă că există  $V \in \mathcal{V}(b)$  astfel încât  $V \subset CA$ . Atunci  $V \cap \bar{A} = \emptyset$ , de unde rezultă că  $b$  nu este punct aderent pentru  $A$ , deci  $b \in C\bar{A}$ .

**Observația 3.7.4.** Bila închisă  $\check{B}(a, r)$  este o mulțime închisă,  $\forall a \in \square^n$  și  $\forall r > 0$ .

Din Teorema 3.7.1. rezultă că este suficient să arătăm că mulțimea  $C\check{B}(a, r) = \{x \in \square^n; \|x - a\| > r\}$  este o mulțime deschisă.

Fie  $b \in C\check{B}(a, r)$  și fie  $0 < \varepsilon < \|b - a\| - r$ . Dacă  $x \in B(b, \varepsilon)$ , atunci  $\|x - b\| < \varepsilon$ . În continuare avem:

$$\|b - a\| \leq \|b - x\| + \|x - a\| < \|b - a\| - r + \|x - a\|,$$

de unde rezultă că  $\|x - a\| > r$ , deci că  $x \in \check{B}(a, r)$ .

Așadar,  $B(b, \varepsilon) \subset \check{B}(a, r)$ , deci  $b$  este punct interior pentru  $\check{B}(a, r)$ . Cum  $b$  a fost arbitrar rezultă că  $\check{B}(a, r)$  este deschisă.

**Exemple**

1. Dacă  $X = \mathbb{R}$ , atunci  $\check{B}(a, r) = [a - r, a + r]$ . Rezultă că orice interval simetric închis este o mulțime închisă. Cum orice interval închis  $[\alpha, \beta]$  se poate reprezenta ca un interval închis simetric, rezultă că orice interval închis din  $\mathbb{R}$  este o mulțime închisă.

2. Fie  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $a \in \mathbb{R}^2$  și  $r > 0$ . Din punct de vedere geometric, mulțimea  $\check{B}_2(a, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\}$  reprezintă discul închis (cercul inclusiv circumferința) cu centrul în  $a$  și de rază  $r$ , iar mulțimea  $\check{B}_\infty(a, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; |x_1 - a_1| \leq r, |x_2 - a_2| \leq r\}$  reprezintă pătratul închis (inclusiv laturile) cu centrul în  $a$  și de latură  $2r$ .

3. Dacă  $X = \mathbb{R}^3$ , atunci  $\check{B}_2(a, r)$  (sfera închisă cu centrul în  $a$  și de rază  $r$ ) este o mulțime închisă.

De asemenea, mulțimea  $\check{B}_\infty(a, r)$ , care reprezintă cubul închis (inclusiv fețele) cu centrul în  $a$  și de muchie  $2r$  este o mulțime închisă.

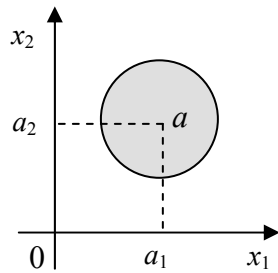


Fig. 4

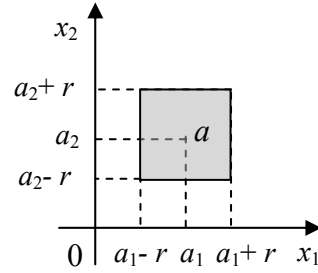


Fig. 5

Proprietățile mulțimilor închise sunt puse în evidență de următoarea propoziție.

**Propoziția 3.7.3.**

- (i) Orice reuniune finită de mulțimi închise este o mulțime închisă.
- (ii) O intersecție oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.
- (iii) Mulțimile  $\mathbb{R}^n$  și  $\emptyset$  sunt închise.

*Demonstrație*

Demonstrația rezultă din Teorema 3.7.1, Propoziția 3.7.2 și relațiile De Morgan. De exemplu.

- (i) Fie  $A_1, A_2, \dots, A_m$  mulțimi închise și fie  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ .

Din Teorema 3.7.1. rezultă că este suficient să demonstrăm că mulțimea  $CA$  este deschisă. Conform relațiilor De Morgan,  $CA = \bigcap_{i=1}^m CA_i$ . Cum  $CA_i$  este deschisă pentru orice  $i = \overline{1, m}$ , din Propoziția 3.7.2 rezultă că  $\bigcap_{i=1}^m CA_i = CA$  este deschisă.

**Definiția 3.7.5.** Se numește frontiera mulțimii  $A$  și se notează cu  $Fr A$ , mulțimea:

$$Fr A = \bar{A} \cap \overline{CA}.$$

**Lema 3.7.1.** Pentru orice  $A \subset \mathbb{R}^n$  avem:

$$C \overset{\circ}{A} = \overline{CA} \text{ și } \overline{CA} = \overset{\circ}{B} \text{ unde } B = CA.$$

*Demonstrație*

Dacă  $b \in C \overset{\circ}{A}$ , atunci  $b \notin \bar{A}$ , deci oricare ar fi  $V \in \mathcal{V}(b)$  avem  $V \cap CA \neq \emptyset$ . Rezultă că  $b \in \overline{CA}$ . Reciproc, dacă  $b \in \overline{CA}$ , atunci  $V \cap CA \neq \emptyset$ . Rezultă că  $b \in \overset{\circ}{A}$ , deci  $\overline{CA} \subset C \overset{\circ}{A}$ . În mod asemănător se demonstrează cealaltă egalitate.

**Propoziția 3.7.4.** Fie  $A$  o mulțime oarecare din  $\mathbb{R}^n$ . Atunci

- (i)  $\overset{\circ}{A}$  este o mulțime deschisă.
- (ii)  $\bar{A}$  este o mulțime închisă.
- (iii)  $Fr A$  este o mulțime închisă și  $Fr A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .

*Demonstrație*

- (i) Fie  $a \in \overset{\circ}{A}$ . Atunci există  $r > 0$  astfel încât  $B(a, r) \subset A$ .

Dacă notăm cu  $V = B(a, r)$ , atunci conform Observației 3.7.3.  $V$  este o mulțime deschisă. Așadar, avem:  $V = \overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{A}$ , de unde rezultă că  $a$  este punct interior pentru  $\overset{\circ}{A}$ , deci  $\overset{\circ}{A}$  este o mulțime deschisă.

- (ii) Din Lema 3.7.1. rezultă că  $\overline{CA} = \overset{\circ}{B}$  unde  $B = CA$ . Așadar,  $\overline{CA}$  este deschisă, de unde rezultă că mulțimea  $\bar{A}$  este închisă (Vezi Teorema 3.7.1.).

- (iii) Din Lema 3.7.1. rezultă:

$$Fr A = \bar{A} \cap \overline{CA} = \bar{A} \cap C \overset{\circ}{A} = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Faptul că  $Fr A$  este închisă rezultă din (ii).

**Teorema 3.7.2.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime oarecare. Atunci:

(i) Un punct  $b \in \mathbb{R}^n$  aparține închiderii  $\bar{A}$  a mulțimii  $A$ , dacă și numai dacă există un șir  $\{a_n\}$  de puncte din  $A$ ,  $a_n \rightarrow b$ .

(ii) Mulțimea  $A$  este închisă dacă și numai dacă limita oricărui șir convergent de elemente din  $A$  aparține lui  $A$ .

*Demonstrație*

(i) Dacă  $b \in \bar{A}$ , atunci  $A \cap B(b, r) \neq \emptyset$ ,  $\forall r > 0$ . În particular,  $B\left(b, \frac{1}{m}\right) \cap A \neq \emptyset$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ . Fie  $a_m \in B\left(b, \frac{1}{m}\right) \cap A$ . Atunci  $a_m \in A$  și  $a_m \rightarrow b$  deoarece  $\|a_m - b\| < \frac{1}{m}$  și  $\frac{1}{m} \rightarrow 0$ .

Reciproc, dacă  $a_m \in A$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  și  $a_m \rightarrow b$ , atunci  $\forall r > 0 \exists m_r \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\|a_m - b\| < r$ ,  $\forall m \geq m_r$ . Rezultă că  $A \cap B(b, r) \neq \emptyset$ ,  $\forall r > 0$ , adică  $b \in \bar{A}$ .

(i) Fie  $A$  o mulțime închisă și fie  $\{a_m\}$  un șir de elemente din  $A$ ,  $a_m \rightarrow b$ . Din (i) rezultă că  $b \in \bar{A}$ . Cum  $A$  este închisă, rezultă că  $b \in A$ . Reciproc, dacă  $b \in \bar{A}$ , atunci din (i) rezultă că există un șir  $\{a_m\}$  de elemente din  $A$ ,  $a_m \rightarrow b$ . Conform ipotezei rezultă că  $b \in A$ , deci  $\bar{A} \subset A$ .

**Definiția 3.7.6.** Un punct  $b \in \mathbb{R}^n$  se numește punct de acumulare pentru mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^n$ , dacă oricare ar fi  $V$  vecinătate a lui  $b$ , există  $a \in A \cap V$ ,  $a \neq b$ . Mulțimea punctelor de acumulare ale lui  $A$  se notează cu  $A'$ . (Incluziunea  $A' \subset \bar{A}$  este evidentă).

**Teorema 3.7.3.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime oarecare. Atunci:

(i) Un punct  $b \in A'$  dacă și numai dacă există un șir  $\{a_k\}$  de elemente din  $A$ ,  $a_k \neq a_l$  dacă  $k \neq l$ , astfel încât  $a_k \rightarrow b$ .

(ii)  $A$  este închisă dacă și numai dacă  $A' \subset A$ .

*Demonstrație*

(i) Fie  $b \in A'$ . Atunci există  $a_1 \in A \cap B(b, 1)$ ,  $a_1 \neq b$ . Fie  $r_1 = \|a_1 - b\|$  și fie  $a_2 \in A \cap B\left(b, \frac{r_1}{2}\right)$ . Evident  $a_2 \neq a_1$  și  $\|a_2 - b\| < \frac{r_1}{2} < \frac{1}{2}$ . Fie  $r_2 = \|a_2 - b\|$  și fie  $a_3 \in B\left(b, \frac{r_2}{2}\right) \cap A$ ,  $a_3 \neq b$ .

Evident  $a_3 \neq a_2$ ,  $a_3 \neq a_1$  și  $\|a_3 - a\| < \frac{r_2}{2} < \frac{1}{2^2}$ . Prin inducție completă se arată că există un șir  $\{a_k\}$  de elemente din  $A$ ,  $a_k \neq a_l$  pentru  $k \neq l$  și  $\|a_k - b\| < \frac{1}{2^{k-1}}$ , deci  $a_k \rightarrow b$ .

(ii) Dacă  $A$  este închisă, atunci  $\bar{A} \subset A$ . Cum  $A' \subset \bar{A}$  rezultă că  $A' \subset A$ . Reciproc, fie  $b \in \bar{A}$ . Din Teorema 3.7.2. rezultă că există un șir  $\{a_k\}$  de puncte din  $A$ ,  $a_k \rightarrow b$ . Dacă  $\{a_k\}$  are o infinitate de termeni distincți, din (i) rezultă că  $b \in A'$ . Cum  $A' \subset A$ , rezultă că  $b \in A$ . Dacă  $\{a_k\}$  nu are o infinitate de termeni distincți, atunci începând de la un anumit rang  $a_k = b$ , deci  $b \in A$ . Am dovedit incluziunea  $\bar{A} \subset A$ , dacă  $A$  este închisă.

**Observația 3.7.5.** Din Teorema 3.7.3. rezultă că dacă  $b$  este punct de acumulare pentru mulțimea  $A$ , atunci în orice vecinătate a sa se află o infinitate de elemente din  $A$ , distincte. Rezultă că mulțimile finite nu au puncte de acumulare, deci sunt închise în virtutea Teoremei 3.7.3. Mulțimile care nu au puncte de acumulare se mai numesc și mulțimi discrete. Există și mulțimi infinite discrete. De exemplu, mulțimea numerelor întregi  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  este discretă, deoarece,  $\forall b \in \mathbb{R}$  și  $\forall V \in \mathcal{V}(b)$  mulțimea  $V \cap \mathbb{Z}$  este finită.

**Definiția 3.7.7.** O mulțime  $A \subset \mathbb{R}^n$  se numește mărginită dacă există  $M > 0$  astfel încât  $\|x\| \leq M$ , oricare ar fi  $x \in A$ .

**Lema 3.7.2. (Cesàro).** Orice șir mărginit de elemente din  $\mathbb{R}^n$  conține un subșir convergent.

*Demonstrație*

Prezentăm demonstrația pentru cazul particular  $n = 2$ .

Fie  $z_k = (x_k, y_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  un șir de elemente din  $\mathbb{R}^2$  mărginit. Rezultă că  $\exists M > 0$  astfel încât  $\|z_k\|_\infty \leq M$ ,  $\forall k$ . În particular, rezultă că șirurile de numere reale  $\{x_k\}$  și  $\{y_k\}$  sunt mărginite. Din Lema Cesàro pentru șiruri de numere reale rezultă că există un subșir  $\{x_{k_p}\}$  convergent. Fie  $a = \lim_{p \rightarrow \infty} x_{k_p}$ . Aplicând din nou Lema Cesàro subșirului  $\{y_{k_p}\}$  rezultă că există un subșir  $\{y_{k_{p_l}}\}$  convergent în  $\mathbb{R}$  la  $b$ . Din Teorema 3.1.1 rezultă că subșirul  $z_{k_{p_l}} = (x_{k_{p_l}}, y_{k_{p_l}})$ ,  $l \in \mathbb{N}^*$  este convergent în  $\mathbb{R}^2$  și are limita  $z = (a, b)$ .

În teoria limitelor de funcții este important de știut când o mulțime are puncte de acumulare. Teorema care urmează ne dă o condiție suficientă ca o mulțime din  $\mathbb{R}^n$  să aibă puncte de acumulare.

**Teorema 3.7.4. (Weierstrass-Bolzano).** *Orice mulțime mărginită și infinită din  $\mathbb{R}^n$  are cel puțin un punct de acumulare.*

*Demonstrație*

Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime mărginită și infinită. Mulțimea fiind mărginită, conține un șir  $\{x_k\}$  de elemente distincte. Deoarece  $A$  este mărginită, rezultă că  $\{x_k\}$  este mărginit.

Din Lema 3.7.2. rezultă că există un subșir  $\{x_{k_p}\}$ ,  $x_{k_p} \rightarrow l \in \mathbb{R}^n$ . Evident  $l$  este punct de acumulare pentru  $A$ .

**Definiția 3.7.8.** *O mulțime  $K \subset \mathbb{R}^n$  se numește compactă dacă este închisă și mărginită.*

Din Propoziția 3.7.3. rezultă că o reuniune finită de mulțimi compacte este o mulțime compactă, și o intersecție oarecare de mulțimi compacte este o mulțime compactă. Este de asemenea clar (din Observația 3.7.5), că orice mulțime finită este compactă.

### 3.8. Limite de funcții

În cele ce urmează, prin funcție vectorială înțelegem orice funcție  $F$  definită pe o mulțime  $A$  din  $\mathbb{R}^n$  cu valori în  $\mathbb{R}^m$ . Așadar, pentru orice  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subset \mathbb{R}^n$ , imaginea  $y = F(x) \in \mathbb{R}^m$ , deci este de forma

$$F(x) = (y_1, y_2, \dots, y_m), \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Dacă notăm cu  $f_i(x) = y_i$ ,  $\forall x \in A$ ,  $\forall i = \overline{1, m}$ , atunci obținem  $m$  funcții scalare  $f_i: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , pe care le numim componentele scalare ale funcției vectoriale  $F$ . Prin urmare avem:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), \quad \forall x \in A \quad \text{sau}$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_m): A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

#### Exemple

1. Funcția  $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  este o funcție vectorială definită pe mulțimea  $A = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$  cu valori în  $\mathbb{R}^2$ .

2. Funcția  $r(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u)$ ,  $u \in [0, \pi]$  și  $v \in [0, 2\pi]$  este o funcție vectorială definită pe dreptunghiul  $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$  cu valori în  $\mathbb{R}^3$ .

**Definiția 3.8.1.** Fie  $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  o funcție vectorială,  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un punct de acumulare pentru  $A$  și  $L \in \mathbb{R}^m$ . Spunem că  $L$  este limita funcției vectoriale  $F$  în punctul  $a$  și notăm cu  $L = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$ , dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $L$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $a$ , astfel încât  $F(x) \in U$ , oricare ar fi  $x \in V \cap A$ ,  $x \neq a$ .

**Teorema 3.8.1.** Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i)  $L = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$ .
- (ii) Pentru  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall x \in A$ ,  $x \neq a$  cu proprietatea  $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$  rezultă  $\|F(x) - L\| < \varepsilon$  (norma  $\|\cdot\|$  este oricare din normele  $\|\cdot\|_\infty$  sau  $\|\cdot\|_2$ ).
- (iii) Pentru orice șir  $\{a_k\}$  de elemente din  $A$ ,  $a_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} a$ ,  $a_k \neq a$  pentru  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , rezultă  $F(a_k) \xrightarrow{\mathbb{R}^m} L$ .

*Demonstrație*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Fie  $\varepsilon > 0$  și fie  $U = B(L, \varepsilon)$ . Evident  $U \in \mathcal{V}(L)$  și conform (i)  $\exists V \in \mathcal{V}(a)$  (depinzând în general de  $\varepsilon$ ) astfel încât  $F(x) \in U$ ,  $\forall x \in V \cap A$ ,  $x \neq a$ .

Deoarece  $V$  este vecinătate pentru  $a$  rezultă că  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $V \supset B(a, \delta_\varepsilon)$ . Fie  $x \in A$ ,  $x \neq a$  cu  $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ . Atunci  $x \in V \cap A$ ,  $x \neq a$ . Conform (i)  $F(x) \in U$ , deci  $\|F(x) - L\| < \varepsilon$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar și fie  $\delta_\varepsilon > 0$  cu proprietățile din (ii). Dacă  $\{x_k\}$  este un șir de elemente din  $A$ ,  $x_k \neq a$ ,  $\forall k$  și  $x_k \rightarrow a$ , atunci  $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\|x_k - a\| < \delta_\varepsilon$  pentru orice  $k \geq k_\varepsilon$ . Din (ii) rezultă că  $\|F(x_k) - L\| < \varepsilon$ ,  $\forall k \geq k_\varepsilon$ , deci  $F(x_k) \rightarrow L$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Presupunem prin absurd că (i) nu este adevărată, deci că  $\exists U_0 \in \mathcal{V}(L)$  astfel încât oricare ar fi  $V \in \mathcal{V}(a)$ ,  $\exists x_V \in V \cap A$ ,  $x_V \neq a$  cu proprietatea că  $F(x_V) \notin U_0$ . În particular, pentru  $V = B(a, \frac{1}{k})$ , rezultă că



$\exists x_k \in A \cap B\left(a, \frac{1}{k}\right), x_k \neq a$  astfel încât  $F(x_k) \notin U_0, \forall k \in \mathbb{N}^*$ . Cum  $x_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right)$  rezultă că  $\|x_k - a\| < \frac{1}{k}$ , deci că  $x_k \rightarrow a$ . Din (iii) rezultă acum că  $F(x_k) \rightarrow L$ . Acest lucru contrazice faptul că  $F(x_k) \notin U_0, \forall k \in \mathbb{N}^*$  și cu aceasta demonstrația este terminată.

**Observația 3.8.1.** Fie  $f: A \subset Y \rightarrow Y$ ,  $a$  un punct de acumulare pentru  $A$  și  $l \in Y$ . Din Teorema 3.8.1. rezultă că  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall x \in A, x \neq a$  cu proprietatea  $|x - a| < \delta_\varepsilon$  rezultă că  $|f(x) - l| < \varepsilon$  (deoarece pe  $Y, \|x\|_2 = \|x\|_\infty = |x|$ ).

Am reobținut astfel definiția limitei unei funcții învățate în liceu.

**Teorema 3.8.2.** Fie  $F = (f_1, f_2, \dots, f_m): A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a$  un punct de acumulare pentru  $A$  și  $L = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ . Atunci,  $L = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$  dacă și numai dacă  $l_i = \lim_{x \rightarrow a} f_i(x)$ , oricare ar fi  $i = \overline{1, m}$ .

*Demonstrație*

Fie  $\{x_k\}$  un șir de elemente din  $A, x_k \neq a$  pentru orice  $k, x_k \rightarrow a$ . Din Teorema 3.8.1. rezultă că  $F(x_k) = (f_1(x_k), \dots, f_m(x_k)) \xrightarrow{\mathbb{R}^m} L = (l_1, \dots, l_m)$ , ceea ce este echivalent cu faptul că  $f_i(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} l_i, \forall i = \overline{1, m}$ , deci că  $l_i = \lim_{x \rightarrow a} f_i(x), i = \overline{1, m}$ .

Reciproc, dacă  $l_i = \lim_{x \rightarrow a} f_i(x), \forall i = \overline{1, m}$ , atunci  $f_i(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} l_i, \forall i = \overline{1, m}$ .

Din Teorema 3.1.1 rezultă că

$$F(x_k) = (f_1(x_k), \dots, f_m(x_k)) \xrightarrow{\mathbb{R}^m} L = (l_1, \dots, l_m),$$

deci că  $L = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$ .

**Observația 3.8.2.** Din Teorema 3.8.2. rezultă că studiul limitei unei funcții vectoriale revine la studiul limitelor componentelor sale scalare. Din această cauză este suficient să studiem în continuare numai limite de funcții scalare, adică funcții de forma  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Fie  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un punct de acumulare al mulțimii  $A$  și fie  $l \in \mathbb{R}$ . Dacă folosim norma  $\| \cdot \|_\infty$ , atunci  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall a \in A$ ,

cu proprietatea  $|x_1 - a_1| < \delta_\varepsilon, \dots, |x_n - a_n| < \delta_\varepsilon$  rezultă că  $|f(x_1, \dots, x_n) - l| < \varepsilon$ .

Să considerăm acum cazul și mai simplu când  $n = 2$ .

Fie deci  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  și  $l \in \mathbb{R}$ . Vom folosi notațiile  $(x, y)$  în loc de  $(x_1, x_2)$  și  $(a, b)$  în loc de  $(a_1, a_2)$ .

Din cele de mai sus rezultă că  $l = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel

încât,  $\forall (x, y) \in A$  cu proprietatea  $|x - a| < \delta_\varepsilon, |y - b| < \delta_\varepsilon$  rezultă  $|f(x, y) - l| < \varepsilon$ .

Din Teorema 3.8.1. rezultă că această definiție este echivalentă cu următoarea:  $l = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $(x_n, y_n)$  de elemente din  $A$ ,

$(x_n, y_n) \neq (a, b)$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (a, b)$  rezultă că șirul  $f(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} l$ .

### Exemple

1. Fie  $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Observăm că există  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = 0$ .

Într-adevăr, deoarece  $|x^3| \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$  și  $|y^3| \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$  rezultă că

$$|f(x, y)| \leq \frac{2(x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă  $(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0, 0)$  atunci  $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow 0$  și deci  $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$ .

Am arătat deci că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$ .

2. Fie funcția  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Vom arăta că nu

există  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ .

Într-adevăr, considerăm șirurile  $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  respectiv  $\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$ . Ambele șiruri converg în  $\square^2$  la  $(0,0)$ . Pe de altă parte  $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$  și  $f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{3}{5}$ , de unde rezultă că nu există  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

**Teorema 3.8.3. (Cauchy-Bolzano).** Fie  $f: A \subset \square^n \rightarrow Y$ , și  $a \in \square^n$  un punct de acumulare pentru  $A$ . Condiția necesară și suficientă să existe  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \square$  este că pentru orice  $\varepsilon > 0$  să existe  $V \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât,  $\forall x', x'' \in V \cap A$ ,  $x' \neq a$ ,  $x'' \neq a$  să avem  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

*Demonstrație*

**Necesitatea.** Fie  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \square$ . Atunci,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists V \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât

$\forall x \in V \cap A$ ,  $x \neq a$  avem  $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Dacă  $x', x'' \in V \cap A$ ,  $x' \neq a$ ,  $x'' \neq a$ ,

atunci  $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - l| + |l - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

**Suficiența.** Fie  $\varepsilon > 0$  și  $V \in \mathcal{V}(a)$  cu proprietățile din enunțul teoremei și fie  $\{x_k\}$  un șir de elemente din  $A$ ,  $x_k \neq a$  pentru orice  $k \in \square^*$ ,  $x_k \rightarrow a$ . Atunci există un rang  $k_\varepsilon \in \square^*$  (acest rang depinde de  $V$  care la rândul său depinde de  $\varepsilon$ ) astfel încât  $x_k \in V$ ,  $\forall k \geq k_\varepsilon$ . Rezultă că  $|f(x_k) - f(x_l)| < \varepsilon$  pentru orice  $k$  și  $l \geq k_\varepsilon$ , deci că  $\{f(x_k)\}$  este un șir fundamental în  $Y$ . Din criteriul general de convergență al lui Cauchy rezultă că  $\{f(x_k)\}$  este convergent. Din Teorema 3.8.1, punctul (iii), rezultă că există  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Pentru o funcție  $f: A \subset \square^n \rightarrow Y$  se pot considera pe lângă limita definită anterior, în care variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tind simultan la  $a_1, a_2, \dots, a_n$  și limite iterate, în care variabilele  $x_1, \dots, x_n$  tind pe rând la  $a_1, \dots, a_n$ .

Pentru a lămuri această problemă considerăm cazul unei funcții de două variabile. Fie dreptunghiul  $D = \{(x, y) \in \square^2 \mid |x - a| < h, |y - b| < k\}$  și  $f: A \rightarrow Y$ .

Presupunem că pentru orice  $x \in (a - h, a + h)$  există  $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ . Evident, această limită depinde de  $x$  și definește o funcție  $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ ,

$x \in (a-h, a+h)$ . Dacă presupunem în plus că există  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ , atunci această limită se notează cu  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$  și se numește limita iterată după  $y$  și  $x$  a funcției  $f$  în punctul  $(a, b)$ . În mod analog se definește  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ .

Limitele iterate nu sunt în general egale. De exemplu, dacă  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  atunci se constată imediat că  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$  și  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1$ . Remarcăm faptul că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  nu există în acest caz.

(Vezi Exemplul 2).

Pentru funcția  $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$ ,  $y \neq 0$ , avem  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ , deoarece

$\left| x \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x|$ . Observăm de asemenea că  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$  în timp ce cealaltă limită iterată  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  nu există.

Legătura dintre limitele iterate și limita în raport cu ansamblul variabilelor  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$  este pusă în evidență de următoarea propoziție.

**Propoziția 3.8.1.** Dacă există  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = l$  și dacă pentru orice

$x \in (a-h, a+h)$  există  $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ , atunci există  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = l$ .

*Demonstrație*

Pentru  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall (x, y) \in D$  cu proprietatea  $|x-a| < \delta_\varepsilon$ ,  $|y-b| < \delta_\varepsilon$  avem  $|f(x, y) - l| < \varepsilon$ . Trecând la limită după  $y$  obținem:  $|\varphi(x) - l| \leq \varepsilon$  pentru orice  $x \in (a-h, a+h)$  cu proprietatea  $|x-a| < \delta_\varepsilon$ . Rezultă că există  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = l$ , deci că există  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = l$ .

**Corolar.** Dacă există limitele iterate și sunt diferite, atunci nu există  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$ .

### 3.9. Funcții continue

Fie  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Pentru orice submulțime  $A \subset \mathbb{R}^n$  notăm cu  $F(A) = \{F(x) \mid x \in A\}$ . Evident  $F(A) \subset \mathbb{R}^m$  și se numește imaginea directă a mulțimii  $A$  prin  $F$ . Pentru orice submulțime  $B \subset \mathbb{R}^m$  notăm cu  $F^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \in B\}$ . Mulțimea  $F^{-1}(B)$  se numește preimaginea mulțimii  $B$  prin  $F$ .

**Definiția 3.9.1.** Fie  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  și  $a \in A$ . Spunem că  $F$  este continuă în punctul  $a$  dacă  $\forall U \in \mathcal{V}[F(a)], \exists V \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât  $F(V \cap A) \subset U$ . Dacă  $F$  este continuă în fiecare punct din  $A$ , atunci  $F$  este continuă pe  $A$ .

**Observația 3.9.1.** Dacă  $a \in A$  este punct de acumulare pentru  $A$ , atunci  $F$  este continuă în  $x = a$  dacă și numai dacă există  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$ . Dacă  $a \in A$  nu este punct de acumulare pentru  $A$  (un astfel de punct se numește punct izolat), atunci există  $V \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât  $V \cap A = \{a\}$  și evident  $F(V \cap A) \subset U$ ,  $\forall U \in \mathcal{V}[F(a)]$ . Rezultă că orice funcție este continuă într-un punct izolat din domeniul său de definiție.

**Teorema 3.9.1.** Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i)  $F$  este continuă în  $a \in A$
- (ii)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall x \in A$  cu proprietatea  $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$  rezultă că  $\|F(x) - F(a)\| < \varepsilon$
- (iii) Pentru orice șir  $\{x_k\}$  de elemente din  $A$ ,  $x_k \rightarrow a$ , rezultă  $F(x_k) \rightarrow F(a)$ .

Demonstrația rezultă din Teorema 3.8.1 și Observația 3.9.1, cu mențiunea că dacă  $a \in A$  este un punct izolat, atunci oricare din afirmațiile (i)-(iii) este evidentă.

**Teorema 3.9.2.** O funcție vectorială  $F = (f_1, \dots, f_n): A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este continuă în punctul  $a \in A$  dacă și numai dacă fiecare componentă a sa  $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă în  $a$ .

Demonstrația rezultă din Teorema 3.8.2 și Observația 3.9.1.

Din Teorema 3.9.2. rezultă că este suficient să studiem continuitatea funcțiilor scalare.

Fie  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  și  $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ . Dacă folosim norma  $\| \cdot \|_\infty$ , atunci  $f$  este continuă în  $a$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât, oricare ar fi  $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$  cu proprietatea  $|x_1 - a_1| < \delta_\varepsilon, \dots, |x_n - a_n| < \delta_\varepsilon$  rezultă

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)| < \varepsilon.$$

În continuare vom considera cazul funcțiilor de 2 variabile și vom folosi notația  $(x, y)$  în loc de  $(x_1, x_2)$  și  $(a, b)$  în loc de  $(a_1, a_2)$ .

Dacă  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$  și  $(a, b) \in A$ , atunci  $f$  este continuă în  $(a, b)$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall (x, y) \in A$  cu  $|x - a| < \delta_\varepsilon, |y - b| < \delta_\varepsilon$  rezultă  $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$ . Această definiție este echivalentă cu următoarea: pentru orice șir  $\{(x_n, y_n)\}$  de puncte din  $A$ ,  $(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (a, b)$  rezultă că  $f(x_n, y_n) \xrightarrow{Y} f(a, b)$ .

### Exemple

1. Funcția  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 5$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  este continuă pe  $\mathbb{R}^2$ , deoarece  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$  și  $\forall (x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$  rezultă că  $f(x_n, y_n) \rightarrow f(a, b)$ .

$$2. \text{ Funcția } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este continuă pe  $\mathbb{R}^2$ .

Într-adevăr, dacă  $(a, b) \neq (0, 0)$  afirmația rezultă din definiția cu șiruri. Continuitatea în origine rezultă din faptul că, așa cum s-a arătat în subcap. 3.8,

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$3. \text{ Funcția } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nu este continuă în origine, deoarece, așa cum s-a arătat în subcap. 3.8, această funcție nu are limită în acest punct.

**Definiția 3.9.2.** Fie  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$  și  $A_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in A\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Spunem că  $f$  este continuă în raport cu variabila  $x_i$  în punctul  $a$  dacă funcția de o variabilă:

$$t \rightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n): A_i \rightarrow \mathbb{R} \text{ !}$$

este continuă în punctul  $t = a_i$ .

**Observația 3.9.2.** Dacă  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă în  $a \in A$ , atunci  $f$  este continuă în  $a$  în raport cu orice variabilă  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există funcții continue într-un punct în raport cu fiecare variabilă dar care nu sunt continue în acel punct.

$$\text{Exemplu. } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Observăm că  $f$  nu este continuă în origine, în raport cu ansamblul variabilelor, deoarece nu are limită în origine.

Într-adevăr, șirurile  $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$  și  $\left\{\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$  converg în  $\mathbb{R}^2$  la  $(0, 0)$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{5}.$$

Pe de altă parte,  $f(x, 0) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , de unde rezultă că funcția  $x \rightarrow f(x, 0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă în  $x = 0$ , deci  $f$  este continuă în  $(0, 0)$  în raport cu  $x$ . Analog,  $f$  este continuă în  $(0, 0)$  în raport cu  $y$ .

**Teorema 3.9.3.** Fie  $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m$  și  $G: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Dacă  $F$  este continuă în  $a \in A$  și  $G$  este continuă în  $b = F(a) \in B$ , atunci funcția compusă  $H = G \circ F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  este continuă în punctul  $a$ .

*Demonstrație*

Demonstrația rezultă din Teorema 3.9.1 punctul (iii). Într-adevăr, dacă  $\{x_k\}$  este un șir oarecare de elemente din  $A$ ,  $x_k \rightarrow a$ , atunci  $F(x_k) \rightarrow F(a) = b$  și  $G[F(x_k)] \rightarrow G[F(a)]$ . Așadar,  $H(x_k) \rightarrow H(a)$ , deci  $H$  este continuă în  $a$ .

**Teorema 3.9.4.** Dacă  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  este continuă în punctul  $a \in A$  și  $f(a) > 0$  [ $f(a) < 0$ ], atunci există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât  $f(x) > 0$  [ $f(x) < 0$ ] oricare ar fi  $x \in V \cap A$ .

*Demonstrație*

Presupunem  $f(a) > 0$  și notăm cu  $\varepsilon = \frac{1}{2}f(a)$ . Deoarece  $f$  este continuă în  $x = a$  rezultă că există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall x \in A$  cu  $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$  avem  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . Dacă notăm cu  $V = B(a, \delta_\varepsilon)$ , atunci  $V \in \mathcal{V}(a)$  și pentru orice  $x \in V \cap A$  avem:

$$\frac{1}{2}f(a) = f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon = \frac{3}{2}f(a), \text{ deci } f(x) > 0.$$

**Teorema 3.9.5.** Fie  $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  și  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dacă  $f$  și  $g$  sunt continue în  $a \in A$ , atunci funcțiile  $\alpha f + \beta g$  și  $fg$  sunt continue în  $a$ . Dacă  $g(a) \neq 0$ , atunci funcția  $\frac{f}{g}$  este continuă în  $a$ .

*Demonstrație*

Fie  $\{x_k\}$  un șir de elemente din  $A$ ,  $x_k \rightarrow a$ . Din ipoteză rezultă că  $f(x_k) \rightarrow f(a)$  și  $g(x_k) \rightarrow g(a)$ . Ținând seama de proprietățile șirurilor convergente de numere reale rezultă că:

$$(\alpha f + \beta g)(x_k) = \alpha f(x_k) + \beta g(x_k) \rightarrow \alpha f(a) + \beta g(a) = (\alpha f + \beta g)(a)$$

$$(fg)(x_k) = f(x_k)g(x_k) \rightarrow f(a)g(a) = (fg)(a),$$

de unde rezultă că  $\alpha f + \beta g$  și  $fg$  sunt continue în  $a$ .

Dacă  $g(a) \neq 0$ , atunci din Teorema 3.9.4, rezultă că există  $V \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât  $g(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in V \cap A$ . Renunțând, eventual la un număr finit de termeni ai șirului  $\{x_k\}$  și renotând termenii acestui șir, putem presupune că  $x_k \in V \cap A$ ,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{ deci } g(x_k) \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*. \text{ Atunci } \left(\frac{f}{g}\right)(x_k) = \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \rightarrow \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a), \text{ de unde rezultă că } \frac{f}{g} \text{ este continuă în punctul } a.$$

**Teorema 3.9.6.** Următoarele afirmații sunt echivalente:



- (i)  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este continuă pe  $\mathbb{R}^n$
- (ii)  $F^{-1}(D)$  este deschisă, oricare ar fi  $D \subset \mathbb{R}^m$  deschisă.
- (iii)  $F^{-1}(B)$  este închisă, oricare ar fi  $B \subset \mathbb{R}^m$  închisă.

*Demonstrație*

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Fie  $D \subset \mathbb{R}^m$  deschisă și fie  $a \in F^{-1}(D)$  oarecare. Atunci  $b = F(a) \in D$  și deoarece  $D$  este deschisă, există  $U \in \mathcal{V}(b)$  astfel încât  $U \subset D$ . Cum  $F$  este continuă în  $a$ , rezultă că  $\exists V \in \mathcal{V}(a)$  cu proprietatea că  $F(V) \subset U \subset D$ , deci  $V \subset F^{-1}(U) \subset F^{-1}(D)$ . Așadar,  $a$  este punct interior pentru  $F^{-1}(D)$ , deci  $F^{-1}(D)$  este deschisă.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Fie  $a \in \mathbb{R}^n$  oarecare și fie  $b = F(a)$ .

Dacă  $U \in \mathcal{V}(b)$ , atunci există  $r > 0$  astfel încât  $U \supset B(b, r)$ . Cum  $B(b, r)$  este deschisă, din (ii) rezultă că  $V = F^{-1}(B(b, r))$  este deschisă. Evident  $V \in \mathcal{V}(a)$  și  $F(V) \subset U$ , deci  $F$  este continuă în  $a$ .

Echivalența (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) rezultă din Teorema 3.7.1. și din observația imediată  $CF^{-1}(B) = F^{-1}(CB)$ , oricare ar fi  $B \subset \mathbb{R}^m$ .

### 3.10. Proprietățile funcțiilor continue pe mulțimi compacte și conexe

Reamintim că prin mulțime compactă în  $\mathbb{R}^n$  se înțelege o mulțime închisă și mărginită.

**Teorema 3.10.1.** Fie  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  o funcție continuă. Dacă mulțimea  $K \subset \mathbb{R}^n$  este compactă, atunci mulțimea  $F(K)$  – imaginea sa directă prin  $F$ , este de asemenea compactă.

*Demonstrație*

Vom arăta că  $F(K) = \{F(x); x \in K\}$  este închisă și mărginită. Presupunem pentru început că  $F(K)$  nu este mărginită. Atunci  $\forall M > 0, \exists x_M \in K$  astfel încât  $\|F(x_M)\| > M$ .

În particular, pentru  $M = \frac{1}{p}$ ,  $p \in \mathbb{Q}^*$  există  $x_p \in K$  astfel încât

$$\|F(x_p)\| > p. \quad (3.31)$$

Deoarece mulțimea  $K$  este mărginită, rezultă că șirul  $\{x_p\}$  este mărginit, deci conține un subșir  $\{x_{p_l}\}$  convergent (conform lemei Cesàro). Fie  $a = \lim_{l \rightarrow \infty} x_{p_l}$ . Cum  $K$  este închisă, rezultă că  $a \in K$  (vezi Teorema 3.7.2).

În sfârșit, ținând seama de faptul că  $F$  este continuă, rezultă că  $F(a) = \lim_{l \rightarrow \infty} F(x_{p_l})$ . Pe de altă parte, din (3.31) avem  $\|F(x_{p_l})\| > p_l$ , de unde rezultă că  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|F(x_{p_l})\| = \|F(a)\| = +\infty$ . Am ajuns astfel la o contradicție, deoarece  $\|F(a)\|$  este finită.

Vom arăta acum că  $F(K)$  este închisă. Fie  $b \in \overline{F(K)}$  oarecare. Din Teorema 3.7.2 rezultă că există un șir  $\{y_p\}$  de elemente din  $F(K)$  astfel încât  $y_p \rightarrow b$ .

Fie  $x_p \in K$  cu proprietatea că  $y_p = F(x_p)$ . Așa cum am arătat în prima parte a demonstrației există un subșir  $x_{p_l} \rightarrow a$ ,  $a \in K$  și  $y_{p_l} = F(x_{p_l}) \rightarrow F(a)$ . Pe de altă parte  $y_{p_l} \rightarrow b$ , de unde rezultă că  $b = F(a) \in F(K)$ .

Am demonstrat că  $\overline{F(K)} \subset F(K)$ , deci că  $F(K)$  este închisă.

**Definiția 3.10.1.** Fie  $f: A \subset \square^n \rightarrow Y$  mărginită. Spunem că  $f$  își atinge marginile pe mulțimea  $A$  dacă  $\exists x_M \in A$  și  $x_m \in A$  astfel încât

$$f(x_M) = M = \sup f(A) \text{ și } f(x_m) = m = \inf f(A).$$

**Teorema 3.10.2.** Fie  $f: K \subset \square^n \rightarrow Y$  o funcție continuă. Dacă mulțimea  $K$  este compactă atunci  $f$  este mărginită pe  $K$  și își atinge marginile pe  $K$ .

*Demonstrație*

Faptul că  $f$  este mărginită pe  $K$  rezultă din Teorema 3.10.1. Fie  $M = \sup f(K)$  și  $m = \inf f(K)$ . Observăm că  $M, m \in \overline{f(K)}$ . Într-adevăr, dacă  $V$  este o vecinătate pentru  $M$ , atunci  $\exists \varepsilon > 0$  astfel încât  $V \supset (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ . Din definiția marginii superioare, rezultă că există  $x_\varepsilon \in K$  astfel încât  $M - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$ . Așadar,  $V \cap f(K) \neq \emptyset$ . Cum  $V$  a fost arbitrar, rezultă că  $M$  este punct aderent pentru  $f(K)$ . Analog se arată că  $m \in \overline{f(K)}$ . Pe de altă parte  $f(K)$  este închisă, deci  $M, m \in f(K)$ . Așadar, există  $x_M \in K$  și  $x_m \in K$  astfel încât  $M = f(x_M)$  și  $m = f(x_m)$ .

**Definiția 3.10.2.** O funcție  $F: A \subset \square^n \rightarrow \square^m$  se numește uniform continuă pe  $A$ , dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall x', x'' \in A$  cu proprietatea  $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$  rezultă  $\|F(x') - F(x'')\| < \varepsilon$ .

Reamintim că  $F$  este continuă pe  $A$  dacă este continuă în fiecare punct din  $A$ , deci dacă  $\forall x \in A$  și  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_{x,\varepsilon} > 0$  astfel încât  $\forall x' \in A$  cu proprietatea  $\|x' - x\| < \delta_{x,\varepsilon}$ , rezultă că  $\|F(x') - F(x)\| < \varepsilon$ .

Prin urmare, deosebirea între continuitatea uniformă și continuitatea pe  $A$ , constă în faptul că în cazul continuității uniforme, pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un număr  $\delta_\varepsilon > 0$ , același pentru toate punctele  $x \in A$ , astfel încât  $\|F(x') - F(x'')\| < \varepsilon$  pentru orice  $x', x'' \in A$  care satisfac condiția  $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$ . Evident, orice funcție uniform continuă pe  $A$  este continuă pe  $A$ . Afirmația reciprocă nu este în general adevărată.

**Exemplu.** Funcția  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{Y}$  este continuă pe  $\mathbb{Y}$ , dar nu este uniform continuă pe  $\mathbb{Y}$ .

Pentru a arăta că  $f$  nu este uniform continuă pe  $\mathbb{Y}$ , va trebui să arătăm că  $\exists \varepsilon_0 > 0$  astfel încât  $\forall \delta > 0$ ,  $\exists x'_\delta, x''_\delta \in \mathbb{Y}$  cu proprietățile:

$$|x'_\delta - x''_\delta| < \delta \text{ și } |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

Fie  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$  și  $\delta > 0$  oarecare. Observăm că dacă  $x' = \sqrt{n+1}$  și  $x'' = \sqrt{n}$ , atunci  $|f(x') - f(x'')| = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Pe de altă parte  $x' - x'' = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$ . Rezultă că  $\exists$  un rang  $n_\delta \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \delta$ ,  $\forall n \geq n_\delta$ . Dacă alegem  $x'_\delta = \sqrt{n_\delta + 1}$  și  $x''_\delta = \sqrt{n_\delta}$ , atunci  $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$  și  $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| = 1 > \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ .

Așadar  $f$  nu este uniform continuă pe  $\mathbb{Y}$ .

**Propoziția 3.10.1.** Dacă  $f : I \subset \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  este derivabilă și are derivata mărginită pe intervalul  $I$ , atunci  $f$  este uniform continuă pe  $I$ .

*Demonstrație*

Fie  $M > 0$  astfel încât  $|f'(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in I$ . Din Teorema creșterilor finite a lui Lagrange, rezultă că oricare ar fi  $x, y \in I$ , există  $\xi$  între  $x$  și  $y$ , astfel încât  $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$ . Așadar, avem:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq M |x - y|, \forall x, y \in I.$$

Fie  $\varepsilon > 0$  și fie  $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M}$ . Dacă  $|x - y| < \delta_\varepsilon$  atunci  $|f(x) - f(y)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ , deci  $f$  este uniform continuă pe  $I$ .

**Exemplu**

Funcția  $f(x) = 2x + \sin^2 x$ ,  $x \in \mathbb{Y}$  este uniform continuă pe  $\mathbb{Y}$ . Într-adevăr,  $|f'(x)| = |2 + \sin 2x| \leq 3$ ,  $\forall x \in \mathbb{Y}$ . Din Propoziția 3.10.1 rezultă că  $f$  este uniform continuă pe  $\mathbb{Y}$ .

Teorema următoare ne arată că pe mulțimi compacte noțiunile de continuitate și continuitate uniformă sunt echivalente.

**Teorema 3.10.3.** Fie  $F : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  continuă. Dacă mulțimea  $K$  este compactă, atunci  $F$  este uniform continuă pe  $K$ .

*Demonstrație*

Presupunem prin absurd că  $F$  nu este uniform continuă pe  $K$ . Atunci  $\exists \varepsilon_0 > 0$  astfel încât  $\forall \delta > 0$ ,  $\exists x'_\delta, x''_\delta \in K$  cu proprietățile  $\|x'_\delta - x''_\delta\| < \delta$  și  $\|F(x'_\delta) - F(x''_\delta)\| \geq \varepsilon_0$ .

În particular, pentru  $\delta = \frac{1}{p}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  rezultă că există  $x'_p, x''_p \in K$  cu proprietățile:

$$\|x'_p - x''_p\| < \frac{1}{p} \quad (3.32)$$

$$\|F(x'_p) - F(x''_p)\| \geq \varepsilon_0. \quad (3.33)$$

Deoarece  $K$  este mărginită, șirul  $\{x'_p\}$  este mărginit, deci există un subșir  $x'_{p_l} \rightarrow a$ . Cum  $K$  este închisă rezultă că  $a \in K$  (Teorema 3.7.2). Pe de altă parte, din (3.32) rezultă că  $x''_{p_l} \rightarrow a$ .

Ținând seama că  $F$  este continuă avem:

$$F(x'_{p_l}) \rightarrow F(a) \text{ și } F(x''_{p_l}) \rightarrow F(a).$$

$$\text{Așadar, } F(x'_{p_l}) - F(x''_{p_l}) \rightarrow F(a) - F(a) = 0.$$

Am ajuns astfel la o contradicție, deoarece conform (3.33)  $\|F(x'_{p_l}) - F(x''_{p_l})\| \geq \varepsilon_0$ ,  $\forall l \in \mathbb{N}^*$ .

**Definiția 3.10.3.** O mulțime  $A \subset \mathbb{R}^n$  se numește **conexă** dacă nu există două mulțimi deschise  $D_1$  și  $D_2$  cu proprietățile:

$$A \subset D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset, D_1 \cap A \neq \emptyset, D_2 \cap A \neq \emptyset.$$

**Teorema 3.10.4.** O submulțime nevidă  $A \subset \mathbb{R}^n$  este conexă dacă și numai dacă este un interval (adică  $\forall x, y \in A$  și  $\forall x < z < y$  rezultă  $z \in A$ ).

*Demonstrație*

**Necesitatea.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$  o mulțime conexă. Presupunem prin absurd că  $A$  nu este interval. Atunci  $\exists a, b \in A$  și  $a < c < b$  astfel încât  $c \notin A$ .

Fie  $D_1 = (-\infty, c)$  și  $D_2 = (c, \infty)$ . Evident  $D_1$  și  $D_2$  sunt mulțimi deschise în  $\mathbb{R}$ . Cum  $a \in A \cap D_1$  și  $b \in A \cap D_2$ , rezultă  $A \cap D_1 \neq \emptyset$  și  $A \cap D_2 \neq \emptyset$ . Pe de altă parte  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , de unde rezultă  $D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$ . În sfârșit  $\forall x \in A$  avem  $x \neq c$ , deci sau  $x < c$  sau  $x > c$ , de unde rezultă  $A \subset D_1 \cup D_2$ . Așadar,  $A$  nu e conexă, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

**Suficiență.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$  un interval. Presupunem prin absurd că  $A$  nu este o mulțime conexă, deci există două mulțimi deschise  $D_1$  și  $D_2$  cu proprietățile din Definiția 3.10.3.

Fie  $a_1 \in A \cap D_1$  și  $a_2 \in A \cap D_2$ . Cum  $A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , rezultă  $a_1 \neq a_2$ , deci putem presupune  $a_1 < a_2$  și deoarece  $A$  este interval, avem  $[a_1, a_2] \subset A$ .

Fie  $E = A \cap D_1 \cap (-\infty, a_2)$  și fie  $c = \sup E$ . Evident  $a_1 \leq c \leq a_2$ , deci  $c \in A$ . Pe de altă parte, observăm că  $c < a_2$ . Într-adevăr, dacă  $c = a_2$ , atunci  $c \in D_2$  și cum  $D_2$  este deschisă, există  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset D_2$ . Cum  $c = \sup E$ , rezultă că  $\exists x_\varepsilon \in E$  astfel încât  $c - \varepsilon < x_\varepsilon \leq c$ . Atunci  $x_\varepsilon \in E \cap D_2$ , deci  $A \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ , ceea ce nu este posibil. Așadar,  $c < a_2$ . În continuare vom arăta că  $c \notin D_1 \cup D_2$ , de unde va rezulta contradicția  $A \not\subset D_1 \cup D_2$ . Într-adevăr, dacă  $c \in D_1$ , atunci  $\exists r > 0$  astfel încât  $(c - r, c + r) \subset D_1$ . Fie  $b \in (c, c + r) \cap (-\infty, a_2)$ . Cum  $a_1 \leq c < b < a_2$ , rezultă  $b \in A$ , deci  $b \in A \cap D_1 \cap (-\infty, a_2) = E$ . Deoarece  $c = \sup E$  avem  $b \leq c$ , ceea ce contrazice alegerea lui  $b \in (c, c + r)$ . Analog se arată că  $b \notin D_2$ .

**Teorema 3.10.5.** Fie  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  continuă. Dacă  $A \subset \mathbb{R}^n$  este conexă, atunci  $F(A) \subset \mathbb{R}^m$  este conexă.

*Demonstrație*

Dacă  $f(A)$  nu este conexă, atunci  $\exists$  două mulțimi deschise  $D_1, D_2$  în  $\mathbb{R}^m$  astfel încât

$$F(A) \subset D_1 \cup D_2; F(A) \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset; F(A) \cap D_1 \neq \emptyset; F(A) \cap D_2 \neq \emptyset.$$

Deoarece  $F$  este continuă, din Teorema 3.9.6 rezultă că mulțimile  $F^{-1}(D_1)$  și  $F^{-1}(D_2)$  sunt deschise în  $\mathbb{R}^n$ . Pe de altă parte avem:

$$\begin{aligned} A &\subset F^{-1}(D_1) \cup F^{-1}(D_2); A \cap F^{-1}(D_1) \cap F^{-1}(D_2) = \emptyset; \\ A \cap F^{-1}(D_1) &\neq \emptyset \text{ și } A \cap F^{-1}(D_2) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Rezultă că  $A$  nu este conexă, ceea ce contrazice ipoteza.

**Definiția 3.10.4.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval. Se spune că o funcție  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  are proprietatea Darboux pe  $I$  dacă imaginea  $f(J)$  a oricărui interval  $J \subset I$  este tot un interval.

**Corolarul 3.10.1.** Dacă  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval și  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă pe  $I$ , atunci  $f$  are proprietatea Darboux pe  $I$ .

*Demonstrație*

Dacă  $J \subset I$  este un interval, atunci din Teorema 3.10.4 rezultă că  $J$  este o mulțime conexă, iar din Teorema 3.10.5 că  $f(J)$  este o mulțime conexă în  $\mathbb{R}$ . Aplicând din nou Teorema 3.10.4 rezultă  $f(J)$  interval, deci  $f$  are proprietatea Darboux pe  $I$ .

**Corolarul 3.10.2.** Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $f(a)f(b) < 0$ , atunci  $\exists a < c < b$  astfel încât  $f(c) = 0$ .

*Demonstrație*

Din Corolarul 3.10.1 rezultă că mulțimea  $J = f([a, b])$  este un interval în  $\mathbb{R}$ . deoarece prin ipoteză funcția  $f$  ia valori de semne contrare în  $a$  și  $b$ , putem presupune  $f(a) < 0 < f(b)$ . Cum  $J$  este interval rezultă  $0 \in J$ , deci  $\exists c \in (a, b)$  astfel încât  $f(c) = 0$ .

Corolarul 3.10.2 este util la rezolvarea ecuațiilor. Să presupunem că ecuația  $f(x) = 0$  admite o singură rădăcină în intervalul  $(a, b)$ . Cea mai simplă metodă pentru aproximarea acestei rădăcini este metoda înjumătățirii (sau a bipartiției), care constă în următoarele: împărțim segmentul  $[a, b]$  în două părți egale prin punctul  $c = \frac{a+b}{2}$ . Dacă  $f(c) = 0$ , atunci  $x = c$  este rădăcina căutată.

Dacă  $f(c) \neq 0$ , alegem acel interval  $[a, c]$  sau  $[c, b]$  care are proprietatea că funcția ia valori de semne contrare în capete. Știm că rădăcina se află în acest interval.

Procedăm cu acest interval așa cum am procedat cu intervalul inițial  $[a, b]$ . Algoritmul se încheie, fie când lungimea intervalului ajunge să fie mai mică decât eroarea dată (atunci putem lua rădăcina aproximativă egală cu mijlocul intervalului), fie când rădăcina exactă coincide cu mijlocul unui subinterval.

# 4.

## Calculul diferențial al funcțiilor de mai multe variabile

### 4.1. Derivate parțiale. Diferențiabilitate

**Definiția 4.1.1.** Fie  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $A$  este o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^2$ . Spunem că  $f$  este derivabilă parțial în raport cu  $x$  în punctul  $(a, b) \in A$ , dacă există și e finită următoarea limită:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Această limită se numește derivata parțială a funcției  $f$  în raport cu  $x$  în punctul  $(a, b)$  și se notează cu  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  sau cu  $f'_x(a, b)$ . Dacă există  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  în oricare punct  $(a, b) \in A$ , atunci funcția  $(a, b) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a, b): A \rightarrow \mathbb{R}$  o notăm cu  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

În mod analog se definește derivata parțială a funcției  $f$  în raport cu  $y$  în punctul  $(a, b)$  și anume:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f'_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

Observăm că derivata parțială a lui  $f$  în raport cu  $x$  în punctul  $(a, b)$ , este de fapt derivata obișnuită în punctul  $t = a$ , a funcției de o variabilă  $t \rightarrow f(t, b)$ .

Rezultă că  $\frac{\partial f}{\partial x}$  (respectiv  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ) se calculează derivând funcția  $f$  în raport cu  $x$  și considerând variabila  $y$  constantă (respectiv derivând în raport cu  $y$  și considerând variabila  $x$  constantă).

**Exemplu.** Fie  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$  și fie  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , definită astfel:  $f(x, y) = x^3 y^2 + 2x \ln y + x^y$ . Atunci,



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + 2 \ln y + yx^{y-1} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y + 2 \cdot \frac{x}{y} + x^y \ln x.$$

Pentru funcții de  $n$  variabile avem următoarea definiție.

**Definiția 4.1.2.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă a  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Spunem că  $f$  este derivabilă (parțial) în raport cu variabila  $x_i$  în punctul  $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ , dacă există și e finită următoarea limită:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{h}.$$

Această limită se numește derivata parțială a funcției  $f$  în punctul  $a \in A$  și se notează cu  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  sau cu  $f'_{x_i}(a)$ .

În continuare vom prezenta noțiunea de funcție derivabilă cunoscută din liceu sub o formă echivalentă care va permite generalizarea acestor noțiuni pentru funcții vectoriale.

Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval deschis,  $a \in I$  și  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Reamintim că  $f$  este derivabilă în punctul  $a$  deci există și e finită

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

**Propoziția 4.1.1.** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  și  $a \in I$  un punct interior al intervalului  $I$ . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i)  $f$  este derivabilă (diferențiabilă) în punctul  $a$
- (ii) Există o aplicație liniară  $T = T_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} = 0.$$

*Demonstrație*

**Necesitatea.** Prin ipoteză  $f$  este derivabilă în  $a$ , deci există

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{și e finită.}$$

Dacă notăm cu  $T(h) = f'(a)h$ , pentru orice  $h \in I$ , atunci  $T$  este o aplicație liniară (evident continuă) pe  $\mathbb{R}$ . Mai departe avem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0.$$

**Suficiența.** Prin ipoteză există  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  liniară astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} = 0. \quad (4.1)$$

Pe de altă parte se știe că  $T : Y \rightarrow Y$  este liniară dacă și numai dacă există  $\lambda \in Y$  astfel încât  $T(h) = \lambda h$ ,  $\forall h \in \square$ . Ținând seama de această observație în (4.1)

obținem  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lambda$ . Așadar,  $f$  este derivabilă în  $a$  și  $f'(a) = \lambda$ .

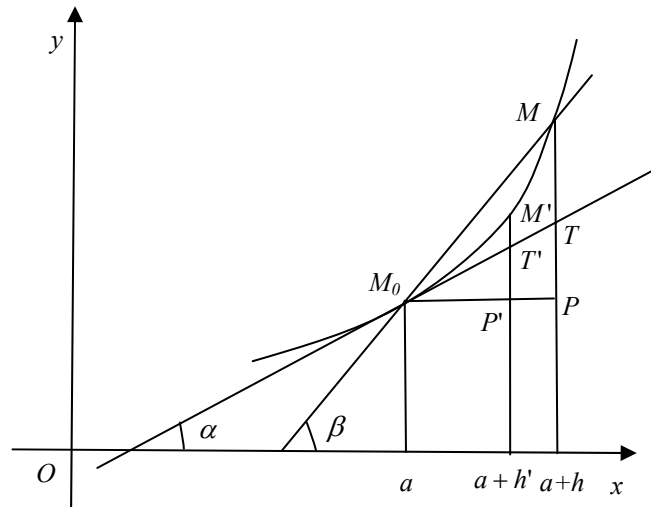
Din demonstrație rezultă că dacă  $f$  este derivabilă în  $x = a$ , atunci există o singură aplicație liniară  $T : Y \rightarrow Y$  pentru care are loc (4.1) și anume:

$$T(h) = f'(a)h, \quad h \in \square.$$

Această aplicație se numește diferențiala lui  $f$  în punctul  $a$  și se notează cu  $df(a)$ .

**Definiția 1.3.** Fie  $f : I \rightarrow \square$  și  $a \in I$  un punct interior. Se numește diferențiala lui  $f$  în punctul  $a$ , următoarea aplicație liniară pe  $Y$ :

$$df(a)(h) = f'(a)h, \text{ oricare ar fi } h \in \square.$$



Fie  $C$  graficul funcției  $f$  și fie  $M_0$  punctul de pe grafic de abscisă  $a$ . De la interpretarea geometrică a derivatei știm că  $f'(a)$  reprezintă panta tangentei în  $M_0$  la grafic ( $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$ ). Pe de altă parte, în triunghiul  $M_0PT$  avem

$$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{PT}{M_0P} = \frac{PT}{h},$$

de unde rezultă că

$$PT = f'(a)h = df(a)(h).$$

Așadar, diferențiala lui  $f$  în punctul  $a$  este aplicația liniară  $df(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a cărei valoare în punctul  $h$  este egală cu lungimea segmentului  $PT$ , unde  $T$  este punctul de abscisă  $a + h$  de pe tangenta în  $M_0$  la graficul funcției  $f$ .

Pe de altă parte, lungimea segmentului  $PM$  este  $f(a + h) - f(a)$  și reprezintă variația funcției  $f$  când se trece de la punctul de abscisă  $a$  la punctul de abscisă  $a + h$ . Fie  $h'$  o valoare mai mică pentru  $h$  și fie  $M', T'$  și  $P'$  punctele corespunzătoare abscisei  $a + h'$ . Avem  $f(a + h') - f(a) = P'M' = P'T' + T'M'$ . Din figură se vede că lungimea segmentului  $M'T'$  este mică în raport cu lungimea segmentului  $P'T'$ , deci  $M'P' \approx P'T' = df(a)(h)$ .

Așadar, pentru valori mici ale lui  $h$ , avem:

$$f(a + h) - f(a) \cong df(a)(h) = f'(a)h.$$

**Exemplu.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ .

$$df(2)(h) = f'(2)h = 4h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $h = 0,001$  avem  $df(2)(0,001) = 0,004$ .

Pe de altă parte  $f(2,001) - f(2) = 0,004001 \cong df(2)(0,001)$ .

În continuare, pentru orice funcție  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabilă în punctul interior  $a \in I$ , notăm cu:

$$\omega(h) = \omega_a(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a), & h \neq 0, \quad a+h \in I \\ 0, & h = 0. \end{cases}$$

Evident  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = \omega(0) = 0$ , deci  $\omega$  este continuă în 0. Pe de altă parte avem:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \omega(h)h, \quad \forall \quad h \in \mathbb{R}$$

sau

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + \varphi(h)$$

unde am notat cu  $\varphi(h) = \omega(h)h$ ,  $\forall \quad h \in \mathbb{R}$ . Observăm că  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$  și

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$ , deci funcția  $\varphi$  este „de două ori mică” în 0. O asemenea funcție se

numește și infinit mic și se notează cu  $o(h)$ . Din punct de vedere geometric  $\varphi(h)$  este lungimea segmentului  $TM$ . Acum înțelegem mai bine de ce pentru valori mici ale lui  $h$  putem aproxima variația funcției  $f(a+h) - f(a)$  cu  $df(a)(h)$ , deoarece pentru astfel de valori, termenul  $\varphi(h)$  este foarte mic în raport cu termenul  $df(a)(h)$ .

Așadar, are loc următoarea propoziție:

**Propoziția 4.1.2.** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in I$  un punct interior și fie  $J = \{h \in \mathbb{R}; a+h \in I\}$ . Următoarele afirmații sunt echivalente:

(1)  $f$  este derivabilă în punctul  $a$ .

(2) Există o aplicație liniară  $T = T_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și o funcție  $\varphi = \varphi_a: J \rightarrow \mathbb{R}$

continuă în 0, cu proprietățile:  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$  și  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$ , astfel încât

$$f(a+h) - f(a) = T(h) + \varphi(h), \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

(Precizăm că  $T(h) = df(a)(h) = f'(a)h$  și  $\varphi(h) = \omega(h)h$ ).

În vederea generalizării noțiunii de funcție diferențiabilă pentru funcții de mai multe variabile reamintim următorul rezultat din algebra liniară.

**Propoziția 4.1.3.**

(i) O aplicație  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este liniară dacă și numai dacă există  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$T(h) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \dots + \lambda_n h_n, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) O aplicație  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este liniară dacă și numai dacă există o matrice  $A = (\lambda_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  astfel încât

$$T(h) = (\lambda_{11}h_1 + \dots + \lambda_{1n}h_n, \dots, \lambda_{m1}h_1 + \dots + \lambda_{mn}h_n), \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(Matricea  $A_T$  este matricea asociată aplicației liniare  $T$  în raport cu bazele canonice din  $\mathbb{R}^n$ , respectiv  $\mathbb{R}^m$ ).

**Propoziția 4.1.4.** Orice aplicație liniară  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este continuă pe  $\mathbb{R}^n$  și  $\|T(x)\|_2 \leq \|A_T\| \|x\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

*Demonstrație*

Fie  $A_T = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$ . Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski rezultă

$$\|T(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (\lambda_{i1}x_1 + \dots + \lambda_{in}x_n)^2 \leq \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) = \|x\|_2^2 \|A_T\|^2,$$

deci

$$\|T(x)\|_2 \leq \|A_T\| \cdot \|x\|_2.$$

Fie  $a \in \mathbb{R}^n$  și fie  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_k \rightarrow a$ ,  $x_k \neq a$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Deoarece  $T$  este liniară avem:

$$\|T(x_k) - T(a)\|_2 = \|T(x_k - a)\|_2 \leq \|A_T\| \|x_k - a\|_2 \rightarrow 0.$$

Rezultă că  $T(x_k) \rightarrow T(a)$ , deci  $T$  este continuă în punctul  $a$ .

**Definiția 4.1.4.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și  $a \in A$ . Spunem că funcția  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  este diferențiabilă (derivabilă) în punctul  $a$ , dacă există o aplicație liniară  $T = T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - T(h)|}{\|h\|} = 0. \quad (4.3)$$

**Teorema 4.1.1.** Fie  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  și  $a \in A$  un punct interior. Dacă  $f$  este diferențiabilă în punctul  $a$ , atunci există  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ . Mai mult, aplicația

liniară  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este unică și este definită astfel:

$$T(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

În continuare vom numi această aplicație **diferențiala de ordinul întâi a funcției  $f$  în punctul  $a$**  și o notăm cu  $df(a)$ . Așadar  $df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este aplicația liniară definită astfel:

$$df(a)(h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n, \quad \forall (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

#### Demonstrație

Prin ipoteză, există  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  liniară astfel încât are loc (4.3).

Pe de altă parte, conform Propoziției 4.1.3, există  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$T(h) = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_n h_n, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Pentru  $h = (0, \dots, h_i, \dots, 0)$  din (4.3) rezultă

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{|f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) - \lambda_i h_i|}{\|h_i\|} = 0$$

și mai departe

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \left| \frac{f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h_i} - \lambda_i \right| = 0,$$

relație echivalentă cu faptul că există

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda_i, \quad \forall \quad i = \overline{1, n}.$$

Așadar,  $T$  este unic determinată și

$$T(h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n, \quad \forall \quad (h_1, \dots, h_n) \in \square^n.$$

**Teorema 4.1.2.** Fie  $f: A \subset \square^n \rightarrow \square$  și  $a \in A$  un punct interior. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i)  $f$  este diferențiabilă în punctul  $a$ .

(ii) Există o aplicație liniară  $T: \square^n \rightarrow \square$ , o vecinătate  $V$  a originii și o

funcție  $\varphi = \varphi_a: V \rightarrow \square$  cu proprietățile:  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = \varphi(0) = 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\varphi(h)|}{\|h\|} = 0$ ,

astfel încât

$$f(a+h) - f(a) = T(h) + \varphi(h), \quad \forall \quad h \in V. \quad (4.4)$$

*Demonstrație*

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Notăm cu  $V = \{h \in \square^n; a+h \in A\}$  și definim  $\omega: V \rightarrow \square$  astfel:

$$\omega(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|}, & h \in V, \quad h \neq 0 \\ 0, & h = 0. \end{cases}$$

Evident, avem:

$$f(a+h) - f(a) = T(h) + \omega(h)\|h\|, \quad \forall \quad h \in V.$$

Dacă notăm cu  $\varphi(h) = \omega(h)\|h\|$ ,  $h \in V$ , atunci

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = \varphi(0) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\varphi(h)|}{\|h\|} = 0 \quad \text{și} \quad f(a+h) - f(a) = T(h) + \varphi(h).$$

Implicația (ii)  $\Rightarrow$  (i) este evidentă.

Din Teorema 4.1.1 și 4.1.2 rezultă.

**Observația 4.1.1.**  $f$  este diferențiabilă în punctul  $a \in \overset{\circ}{A}$ , dacă există  $V \in \mathcal{V}(0)$  și o funcție  $\varphi: V \rightarrow \square$  care este un infinit mic ( $\varphi = o(h)$ ) astfel încât

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + \varphi(h), \quad h \in V.$$

**Corolarul 4.1.1.** Dacă  $f$  este diferențiabilă în punctul  $a \in A$ , atunci  $f$  este continuă în acest punct.

Într-adevăr, dacă trecem la limită în (4.4) obținem

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} T(h) + \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0.$$

Așadar, există  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ , deci  $f$  este continuă în punctul  $a$ .

Acum suntem în măsură să arătăm că afirmația reciprocă din Teorema 4.1.1 nu este în general adevărată.

Existența derivatelor parțiale într-un punct nu atrage după sine diferențiabilitatea funcției în acel punct.

**Exemplu.** Fie funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Deoarece,  $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ , rezultă că există  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ .

Pe de altă parte,  $f$  nu este diferențiabilă în  $(0, 0)$  deoarece nu este continuă în acest punct (Vezi Corolarul 4.1.1).

În continuare vom prezenta condiții suficiente ca o funcție să fie diferențiabilă. Pentru început dăm următoarea definiție.

**Definiția 4.1.4.** O funcție  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $A$  este o mulțime deschisă, este de clasă  $C^1$  pe  $A$  și notăm  $f \in C^1(A)$ , dacă există  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  și sunt continue pe  $A$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ .

**Teorema 4.1.3.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f \in C^1(A)$ , atunci  $f$  este diferențiabilă pe  $A$ .

*Demonstrație*

Pentru simplificarea scrierii dăm demonstrația în cazul particular  $n = 2$ . Fie  $a = (a_1, a_2) \in A$  și fie  $r > 0$  astfel încât  $B(a, r) \subset A$ . Pentru orice  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$  pentru care  $a + h \in A$  avem

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + \\ &+ f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2). \end{aligned}$$

Din Teorema Lagrange rezultă că există  $0 < \theta_i < 1$ ,  $i = 1, 2$  astfel încât:

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2) h_2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dacă notăm cu

$$\omega_1(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)$$

și

$$\omega_2(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2),$$

atunci din (4.5) rezultă

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \omega_1(h)h_1 + \omega_2(h)h_2.$$

În sfârșit, dacă notăm cu  $\varphi(h) = \omega_1(h)h_1 + \omega_2(h)h_2$ , atunci

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + \varphi(h). \quad (4.6)$$

Dacă vom arăta că  $\varphi$  este un infinit mic va rezulta că  $f$  este diferențiabilă în punctul  $a$ .

Deoarece  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  sunt continue rezultă că  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_i(h) = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Pe de altă parte avem:

$$\frac{|\varphi(h)|}{\|h\|} = |\omega_1(h)| \frac{|h_1|}{\|h\|} + |\omega_2(h)| \frac{|h_2|}{\|h\|} \leq |\omega_1(h)| + |\omega_2(h)|,$$

de unde rezultă că  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0$  și cu aceasta teorema este demonstrată.

**Observația 4.1.2.** Din Teorema 4.1.3 rezultă că funcțiile elementare sunt diferențiabile pe orice submulțime deschisă din domeniul lor de definiție.

## 4.2. Diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale. Matrice iacobiene

**Definiția 4.2.1.** Fie  $F = (f_1, \dots, f_m): A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  o funcție vectorială și fie  $a \in A$  un punct interior.

Spunem că  $F$  este diferențiabilă în punctul  $a$  dacă există o aplicație liniară  $T = T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - T(a)(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

( $\|\cdot\|$  este oricare din normele  $\|\cdot\|_\infty$  sau  $\|\cdot\|_2$ ).



**Teorema 4.2.1.** Funcția vectorială  $F = (f_1, \dots, f_m): A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este diferențiabilă în punctul interior  $a \in A$  dacă și numai dacă fiecare componentă scalară a sa  $f_j: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = \overline{1, m}$  este diferențiabilă în punctul  $a$ .

*Demonstrație*

Dacă  $F$  este diferențiabilă în punctul  $a$ , atunci există o aplicație liniară  $T = T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - T(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} = 0. \quad (4.7)$$

Pe de altă parte, din Propoziția 4.1.3 rezultă că există o matrice  $A = (\lambda_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  astfel încât

$$T(h) = (\lambda_{11}h_1 + \dots + \lambda_{1n}h_n, \dots, \lambda_{m1}h_1 + \dots + \lambda_{mn}h_n),$$

oricare ar fi  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Dacă notăm cu  $t_j(h) = a_{j1}h_1 + \dots + a_{jn}h_n$ ,  $\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ , atunci  $t_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este liniară și  $T = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ .

Deoarece  $|f_j(a+h) - f_j(a) - t_j(h)| \leq \|F(a+h) - F(a) - T(h)\|_\infty$ , din (4.7) rezultă că

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f_j(a+h) - f_j(a) - t_j(h)|}{\|h\|_\infty} = 0, \quad \forall j = \overline{1, m}. \quad (4.8)$$

Am arătat deci că  $f_j$  este diferențiabilă în punctul  $a$ , oricare ar fi  $j = \overline{1, m}$ .

Reciproc, dacă fiecare componentă scalară  $f_j$  a funcției vectoriale  $F$  este diferențiabilă în punctul  $a$ , atunci relația (4.8) este adevărată pentru orice  $j = \overline{1, m}$ .

Cum  $\|F(a+h) - F(a) - T(h)\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} |f_j(a+h) - f_j(a) - t_j(h)|$ , rezultă că  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - T(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} = 0$ , deci că  $F$  este diferențiabilă în punctul  $a$ .

**Observația 4.2.1.** Din Teorema 4.1.1 rezultă că  $t_j$  este diferențiala funcției  $f_j$  în punctul  $a$ , deci că:

$$t_j(h) = df_j(a)(h) = \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(a)h_n, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}.$$

Așadar, dacă  $F = (f_1, \dots, f_m)$  este diferențiabilă în punctul  $a$ , atunci aplicația liniară  $T$  este unic determinată și anume:

$$T(h) = (df_1(a)(h), \dots, df_m(a)(h)), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Vom numi această aplicație liniară **diferențiala de ordinul întâi a funcției  $F$  în punctul  $a$**  și o vom nota cu  $dF(a)$ . Rezultă că  $dF(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este următoarea aplicație liniară:

$$\begin{aligned} dF(a)(h) &= (df_1(a)(h), \dots, df_m(a)(h)) = \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)h_n, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)h_n \right), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

**Definiția 4.2.2.** Matricea asociată aplicației liniare  $dF(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  în raport cu bazele canonice din  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathbb{R}^m$  se notează cu:

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \hline \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

și se numește **matrice iacobiană atașată funcției vectoriale  $F$  în punctul  $a$** .

Observăm că avem

$$dF(a)(h) = \left( J_F(a) h^{tr} \right)^{tr},$$

unde cu  $B^{tr}$  am notat transpusa unei matrice oarecare  $B$ .

**Observația 4.2.2.** Din Teorema 4.2.1 rezultă că studiul diferențiabilității unei funcții vectoriale revine la studiul diferențiabilității componentelor sale scalare. Este suficient deci să studiem funcții de forma  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 4.3. Diferențiabilitatea funcțiilor compuse

**Teorema 3.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  și  $B \subset \mathbb{R}^m$  două mulțimi deschise. Dacă  $F: A \rightarrow B$  este diferențiabilă în punctul  $a \in A$  și  $G: B \rightarrow \mathbb{R}^P$  este diferențiabilă în punctul  $b = F(a) \in B$ , atunci funcția compusă  $H = G \circ F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^P$  este diferențiabilă în punctul  $a \in A$  și  $dH(a) = dG(b) \circ dF(a)$ . Mai mult, avem:  $J_H(a) = J_G(b) \cdot J_F(a)$ .

*Demonstrație*

Din ipoteze rezultă că:

$$F(a+h) - F(a) = dF(a)(h) + \varphi(h), \text{ unde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (4.9)$$

și

$$G(b+k) - G(b) = dG(b)(k) + \psi(k), \text{ unde } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|\psi(k)\|}{\|k\|} = 0. \quad (4.10)$$

Din (4.9) rezultă că:

$$\begin{aligned} H(a+h) - H(a) &= G[F(a+h)] - G[F(a)] = \\ &= G[F(a) + dF(a)(h) + \varphi(h)] - G(b). \end{aligned}$$

Dacă notăm cu  $k(h) = dF(a)(h) + \varphi(h)$ , atunci din (4.10) rezultă:

$$H(a+h) - H(a) = G(b + k(h)) - G(b) = dG(b)[k(h)] + \psi[k(h)].$$

Cum  $dG(b)$  este liniară, mai departe avem:

$$\begin{aligned} H(a+h) - H(a) &= dG(b)[dF(a)(h)] + dG(b)[\varphi(h)] + \psi[k(h)] = \\ &= [dG(b) \circ dF(a)](h) + \chi(h) \end{aligned}$$

unde am notat cu

$$\chi(h) = dG(b)[\varphi(h)] + \psi[k(h)].$$

Ținând seama că  $dG(b) \circ dF(a) : \square^n \rightarrow \square^P$  este liniară (fiind o compunere de aplicații liniare) rezultă că este suficient să arătăm că  $\chi$  este un infinit mic, adică

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\chi(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Reamintim că dacă  $A$  este matricea asociată aplicației liniare  $T : \square^n \rightarrow \square^m$ , atunci

$$\|T(x)\| \leq \|A\| \|x\|, \quad \forall x \in \square^n.$$

Ținând seama că  $J_G(b)$  este matricea asociată aplicației liniare  $dG(b) : \square^n \rightarrow \square^m$ , iar  $J_F(a)$  este matricea asociată aplicației liniare  $dF(a) : \square^m \rightarrow \square^P$ , rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\|\chi(h)\|}{\|h\|} &\leq \|J_G(b)\| \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|\psi[k(h)]\|}{\|k(h)\|} \cdot \frac{\|k(h)\|}{\|h\|} \leq \\ &\leq \|J_G(b)\| \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|\psi[k(h)]\|}{\|k(h)\|} \cdot \left( \|J_F(a)\| + \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \right). \end{aligned}$$

Cum  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} = 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} k(h) = 0$  și  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|\psi(k)\|}{\|k\|} = 0$  rezultă că  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\chi(h)\|}{\|h\|} = 0$ .

Așadar, am demonstrat că

$$H(a+h) - H(a) = [dG(b) \circ dF(a)](h) + \chi(h)$$

și  $\chi$  este un infinit mic (un  $o(h)$  pentru  $h \rightarrow 0$ ).

Rezultă că  $H$  este diferențiabilă în punctul  $a$  și  $dH(a) = dG(b) \circ dF(a)$ .

Cum la operația de compunere a aplicațiilor liniare corespunde operația de înmulțire a matricelor lor asociate rezultă că  $J_H(a) = J_G(b) \cdot J_F(a)$ .

**Corolarul 4.3.1.** Fie  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  două mulțimi deschise,  $F = (u, v): A \rightarrow B$  o funcție vectorială de clasă  $C^1$  pe  $A$  și  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție scalară de clasă  $C^1$  pe  $B$ . Atunci, funcția compusă  $h: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$h(x, y) = (f \circ F)(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)], \quad (x, y) \in A,$$

este de clasă  $C^1$  pe  $A$  și au loc formulele:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.11)$$

*Demonstrație*

Prin ipoteză  $u, v$  și  $f$  sunt de clasă  $C^1$  pe mulțimile lor de definiție, deci sunt diferențiabile (conform Teoremei 4.1.3). Din Teorema 4.2.1 rezultă că  $F$  este diferențiabilă pe  $A$ , iar din Teorema 4.3.1 rezultă că funcția compusă  $h = f \circ F$  este diferențiabilă pe  $A$ .

Fie  $(a, b) \in A$  oarecare. Notăm cu  $c = u(a, b)$  și cu  $d = v(a, b)$ . Evident punctul  $(c, d) \in B$ .

Din Teorema 4.3.1 rezultă că  $J_h(a, b) = J_f(c, d) \cdot J_F(a, b)$ , adică

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial h}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(c, d) & \frac{\partial f}{\partial v}(c, d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}.$$

Efectuând calculele obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial u}(c, d) \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial v}(c, d) \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial u}(c, d) \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial v}(c, d) \frac{\partial v}{\partial y}(a, b). \end{aligned}$$

**Exemplu.** Fie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^1$  și fie  $h(x, y) = f\left(x^2 + 2y, \frac{x}{y}\right)$ ,  $y \neq 0$ . Dacă notăm cu  $u(x, y) = x^2 + 2y$  și cu  $v(x, y) = \frac{x}{y}$ , atunci

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{y} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right).\end{aligned}$$

**Observația 4.3.1.** Formulele (4.11) generalizează cunoscuta formulă de derivare a funcțiilor compuse de o variabilă.

Dacă  $h(x) = f[u(x)]$ , atunci  $h'(x) = f'[u(x)] \cdot u'(x)$ .

**Observația 4.3.2.** Formulele (4.11) admit următoarea generalizare evidentă.

Dacă  $h(x_1, \dots, x_n) = f[u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)]$ , atunci

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{cases} \quad (4.12)$$

**Definiția 4.3.1.** Fie  $K \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime cu proprietatea că  $\forall x \in K$  și  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq 0$  rezultă că  $tx \in K$ . O funcție  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  se numește omogenă de gradul  $p$  dacă

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

**Exemple.**

1. Funcția  $f(x, y) = 3x^2 - y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , este omogenă de gradul 2 pe  $\mathbb{R}^2$ .
2. Funcția  $f(x, y, z) = \frac{x^2 + 2xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$  este omogenă de gradul 0.

**Teorema 4.3.2. (Euler).** Fie  $K \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă cu proprietatea că  $tx \in K$  pentru orice  $x \in K$  și orice  $t \in \mathbb{R}^*$  și fie  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție diferențiabilă pe  $K$  și omogenă de gradul  $p$ . Atunci avem:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x), \quad \forall \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in K.$$

*Demonstrație*

Prin ipoteză avem

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n), \quad t \in \mathbb{R}^* \text{ și } x \in K. \quad (4.3)$$

Observăm că membrul stâng poate fi privit ca o funcție compusă, dacă notăm cu  $u_1(t) = tx_1, \dots, u_n(t) = tx_n$  și  $h(t) = f[u_1(t), \dots, u_n(t)]$ .

Ținând seama de regulile de derivare (4.12) rezultă

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) \cdot u_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx) \cdot u_n'(t) = pt^{p-1} f(x)$$

și mai departe

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx) = pt^{p-1} f(x).$$

În particular, pentru  $t = 1$  rezultă

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x), \quad \forall \quad x \in K.$$

**Exemplu.** Fie  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0, y \neq 0\}$  și fie

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (x, y) \in K.$$

Se observă că funcția  $f$  este omogenă de gradul 1, deci trebuie să satisfacă relația

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

Într-adevăr,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

#### 4.4. Diferențiala de ordinul întâi și invarianța formei sale

Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție diferențiabilă pe  $A$ . Diferențiala de ordinul întâi a funcției  $f$  în punctul  $a \in A$  este funcția liniară  $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definită astfel:

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Considerăm funcțiile proiecție  $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , definită astfel:

$$p_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Deoarece

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } j = i \\ 0 & \text{dacă } j \neq i. \end{cases}$$

rezultă că  $dp_i(a)(h) = h_i$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ .

Așadar, diferențialele de ordinul întâi ale funcției  $p_i$  nu depind de punctul  $a$ . Prin urmare avem

$$dp_i(h) = dx_i(h) = h_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Cu aceste precizări, diferențiala de ordinul întâi a funcției  $f$  în punctul  $a$  se scrie

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(h) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n(h). \quad (4.14)$$

Dacă scriem relația (1) ca o egalitate de funcții obținem

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n,$$

unde prin  $dx_i$  înțelegem diferențiala de ordinul întâi a funcției  $p_i$ .

**Exemplu.** Fie  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ln \frac{y}{x}$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

Avem:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ln \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ln \frac{y}{x} + \frac{1}{y} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\sqrt{2} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \sqrt{2}.$$

$$df(1,1) = -\sqrt{2} dx + \sqrt{2} dy.$$

Fie  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  mulțimi deschise,  $F = (u_1, \dots, u_n): A \rightarrow B$  o funcție vectorială diferențiabilă pe  $A$  și  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție scalară diferențiabilă pe  $B$ . Considerăm funcția compusă  $h = f \circ F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definită astfel

$$h(x_1, \dots, x_n) = f[u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n)], \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in A.$$

Deoarece  $f = f(u_1, \dots, u_n)$ ,  $(u_1, \dots, u_n) \in B$  rezultă

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n \quad (4.15)$$

Pe de altă parte avem

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n.$$

Ținând cont de formulele de derivare ale funcțiilor compuse avem:

$$\begin{aligned} dh &= \left( \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right) dx_1 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) dx_n = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_1} dx_n \right) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_n} dx_1 + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} dx_n \right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n. \end{aligned}$$

Așadar, avem:

$$dh = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n. \quad (4.16)$$

Formula (4.15) reprezintă expresia diferențialei de ordinul întâi a funcției  $f$  privită ca funcție ce depinde de variabilele  $u_1, \dots, u_n$ . Formula (4.16) reprezintă expresia diferențialei de ordinul întâi a funcției  $f$  privită ca funcția ce depinde de variabilele dependente  $u_i = u_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Această egalitate formală  $dh = df$  poartă numele de proprietatea de invarianță a diferențialei de ordinul întâi la o schimbare de variabile independente.



### 4.5. Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiale de ordin superior

**Definiția 4.5.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și fie  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Presupunem că există  $\frac{\partial f}{\partial x_i}: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Evident aceasta este de asemenea o funcție de  $n$  variabile. Dacă există  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ , aceasta se notează cu  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  sau  $f''_{x_j x_i}$  și se numește derivata parțială de ordinul doi a funcției  $f$  în raport cu variabilele  $x_i$  și  $x_j$ . Dacă  $i = j$  se folosește notația  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$  în loc de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ .

O funcție de  $n$  variabile poate avea  $n^2$  derivate parțiale de ordinul doi.

În cazul  $n = 2$ , al funcțiilor de două variabile, pot exista 4 (patru) derivate parțiale de ordinul 2 și anume:

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{și} \quad f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Următorul exemplu ne arată că derivatele mixte în general nu sunt egale.

(Prin derivată mixtă înțelegem o derivată de forma  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  cu  $i \neq j$ ).

**Exemplu.**

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

După calcule ușor de urmărit obținem:

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} y \left[ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f'_x(0, y) = -y, \quad f''_{yx}(0, 0) = -1.$$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} x \left[ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f'_y(x, 0) = x, \quad f''_{xy}(0, 0) = 1.$$

Așadar, în acest caz avem  $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$ .

O condiție suficientă pentru ca derivatele mixte de ordinul doi să fie egale este dată de următoarea teoremă, cunoscută sub numele de criteriul lui Schwarz.

**Teorema 4.5.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  și  $(a, b) \in A$ . Dacă există  $f''_{xy}$  și  $f''_{yx}$  pe o vecinătate  $V$  a punctului  $(a, b)$ ,  $V \subset A$  și sunt continue în punctul  $(a, b)$ , atunci  $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$ .

*Demonstrație*

Fie  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\} \subset A$  și fie

$$R(x, y) = f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b), \quad (x, y) \in V.$$

Fie  $(x, y) \in V$  fixat și fie  $I$  (respectiv  $J$ ) intervalul închis de capete  $a$  și  $x$  (respectiv  $b$  și  $y$ ).

Dacă notăm cu  $g(t) = f(t, y) - f(t, b)$ ,  $t \in I$ , atunci  $R(x, y) = g(x) - g(a)$ .

Din Teorema Lagrange rezultă că există  $\xi$  între  $a$  și  $x$  astfel încât

$$R(x, y) = g'(\xi)(x - a) = [f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, b)](x - a).$$

Aplicând din nou teorema Lagrange rezultă că există  $\eta$  între  $y$  și  $b$  astfel încât

$$R(x, y) = f''_{yx}(\xi, \eta)(x - a)(y - b). \quad (4.17)$$

În mod analog, dacă notăm cu

$$h(t) = f(x, t) - f(a, t), \quad t \in J$$

atunci

$$R(x, y) = h(y) - h(b).$$

Aplicând de două ori teorema Lagrange, rezultă

$$R(x, y) = f''_{xy}(\xi', \eta')(x - a)(y - b). \quad (4.18)$$

Așadar avem

$$f''_{yx}(\xi, \eta) = f''_{xy}(\xi', \eta'). \quad (4.19)$$

Deoarece  $f''_{yx}$  și  $f''_{xy}$  sunt continue în  $(a, b)$ , trecând la limită în (4.19) rezultă:

$$f''_{yx}(a, b) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f''_{yx}(\xi, \eta) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f''_{xy}(\xi', \eta') = f''_{xy}(a, b).$$

**Observația 4.5.1.** Teorema 4.5.1 se poate generaliza pentru funcția de  $n$  variabile și anume: dacă  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  deschisă și există  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  și  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  pe o vecinătate  $V$  a punctului  $a \in A$ ,  $V \subset A$  și sunt continue în  $a$ , atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Definirea derivatelor parțiale de ordin mai mare ca 2 este evidentă. De exemplu, dacă există  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)$ , aceasta se notează cu  $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ .

**Definiția 4.5.2.** Orice element  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$  se numește multiindice.

Notăm cu  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  și cu  $D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ , unde  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Funcția  $f$  se numește de clasă  $C^p$  pe mulțimea deschisă  $A \subset \mathbb{R}^n$  dacă există  $D^k f$  și e continuă pe  $A$  pentru orice multi-indice  $k$  cu  $|k| \leq p$ .

**Exemplu.** Fie  $k = (2, 1, 0, 3)$ . Atunci  $|k| = 6$  și  $D^k f = \frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_4^3}$ .

Funcția  $f$  este de clasă  $C^5$  pe mulțimea deschisă  $A \subset \mathbb{R}^4$ , dacă există  $D^k f$  și e continuă pe  $A$ , pentru orice multi-indice  $k \in \mathbb{N}^4$  cu  $|k| \leq 5$ .

Pentru derivate mixte de ordin mai mare ca 2, posibilitatea permutării ordinii de derivare se demonstrează aplicând de mai multe ori Teorema 4.5.1.

**Exemplu.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^3$  o mulțime deschisă și  $f \in C^4(A)$ . Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}. \end{aligned}$$

**Definiția 4.5.3.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă,  $a \in A$  și  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f \in C^2(A)$ , atunci se numește diferențiala de ordinul doi a funcției  $f$  în punctul  $a$  și se notează cu  $d^2 f(a)$  următoarea formă pătratică pe  $\mathbb{R}^n$ :

$$d^2 f(a)(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Se folosește și notația

$$d^2 f(a) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j.$$

Matricea simetrică  $H = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  se numește matricea hessiană

asociată funcției  $f$  în punctul  $a$ . În cazul funcțiilor de două variabile avem

$$d^2 f(a, b)(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) k^2, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2,$$

sau

$$d^2 f(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) dy^2.$$

**Exemplu.** Fie  $f(x, y) = x^3 y - 2xy^2$ .

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y - 2y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 4xy.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 - 4y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x$$

$$d^2 f(1, 2) = 12 dx^2 - 10 dx dy - 4 dy^2.$$

Pentru o funcție de trei variabile, diferențiala de ordinul doi arată astfel:

$$\begin{aligned} d^2 f(a, b, c) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b, c) dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b, c) dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a, b, c) dz^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b, c) dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a, b, c) dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a, b, c) dy dz. \end{aligned}$$

Revenind la cazul general al funcțiilor de  $n$  variabile, constatăm că diferențiala de ordinul doi este o formă pătratică. Dacă notăm cu  $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ ,

atunci  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $\forall i$  și  $j$  și  $d^2 f(a)(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j$ .

Reamintim următoarele definiții și rezultatele de algebră liniară.

Diferențiala de ordinul 2,  $d^2 f(a)$  este pozitiv (negativ) definită dacă  $d^2 f(a)(h) > 0$  [ $d^2 f(a)(h) < 0$ ] pentru orice  $h \neq 0$ .

Dacă există  $h_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ , astfel încât  $d^2 f(a)(h_1) < 0$  și  $d^2 f(a)(h_2) > 0$ , spunem că  $d^2 f(a)$  este alternantă.

Introducem notațiile:

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_n = \det A.$$

#### **Teorema 4.5.2. (Sylvester)**

*Condiția necesară și suficientă ca  $d^2 f(a)$  să fie pozitiv (negativ) definită este ca  $\Delta_i > 0$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$  (respectiv  $(-1)^i \Delta_i > 0$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ ).*

În continuare, vom introduce următoarea convenție de notație:

$$\begin{aligned} \text{Vom nota cu } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \text{ în loc de } \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right)^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \text{ în loc de } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) & \text{ în loc de } \left( \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)^2 \end{aligned}$$

Cu această convenție, pentru funcții de două variabile avem:

$$\begin{aligned} d^2 f(a) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) dy^2 = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) dy \right)^{(2)}. \end{aligned}$$

Pentru a defini diferențiala de ordinul  $m$ , vom extinde convenția precedentă în mod firesc și anume: vom nota

$$\text{cu } \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(a, b) \text{ în loc de } \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right)^m,$$

$$\text{cu } \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}(a, b) \text{ în loc de } \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, b) \cdot \frac{\partial^{m-k} f}{\partial y^{m-k}}(a, b) \text{ etc.}$$

**Definiția 4.5.4.** Fie  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  deschisă și  $(a, b) \in A$ . Dacă  $f \in C^m(A)$ , atunci diferențiala de ordinul  $m$  a funcției  $f$  în punctul  $(a, b)$  se definește astfel:

$$\begin{aligned} d^m f(a, b) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) dy \right)^{(m)} = \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k} \partial y^k}(a, b) dx^{m-k} dy^k = \\ &= C_m^0 \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(a, b) dx^m + C_m^1 \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y}(a, b) dx^{m-1} dy + \dots + C_m^m \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(a, b) dy^m. \end{aligned}$$

Prin inducție matematică se poate demonstra următoarea formulă care generalizează binomul lui Newton:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_i \in \mathbb{N}}} \frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \dots k_n!} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}.$$

Folosind această formulă și convențiile anterioare, putem defini diferențiala de ordinul  $m$  a unei funcții

**Definiția 4.5.5.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă,  $a \in A$  și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f \in C^m(A)$  atunci

$$\begin{aligned} d^m f(a) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) dx_n \right)^{(m)} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_i \in \mathbb{N}}} \frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \dots k_n!} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(a) dx_1^{k_1} \dots dx_n^{k_n}. \end{aligned}$$

#### 4.6. Derivatele parțiale de ordinul doi ale funcțiilor compuse de două variabile

**Teorema 4.6.1.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi deschise din  $\mathbb{R}^2$ ,  $F = (u, v) : A \rightarrow B$ ,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  și  $h = f \circ F : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)]$ ,  $\forall (x, y) \in A$ .

Dacă  $F \in C^2(A)$  și  $f \in C^2(B)$ , atunci  $h \in C^2(A)$  și avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

*Demonstrație*

În condițiile date, derivatele de ordinul întâi există și conform formulelor (4.9) din subcap. 4.3 avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\tag{4.20}$$

Vom examina existența derivatei  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  și modul ei de calcul.

Din Teorema 4.3.1 rezultă că funcția  $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}[u(x, y), v(x, y)] : A \rightarrow \mathbb{R}$  admite derivate parțiale de ordinul întâi și anume:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.\tag{4.21}$$

În mod analog avem:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.\tag{4.22}$$

Din (4.20), (4.21) și (4.22) rezultă:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Deoarece, în condițiile noastre  $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ , în final obținem:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

În mod analog se demonstrează și celelalte două formule din enunțul teoremei.

**Exemplu.** Fie  $f \in C^2(\square^2)$  și  $h(x, y) = f(x^2 + y^2, xy)$ . Dacă notăm cu  $u(x, y) = x^2 + y^2$  și cu  $v(x, y) = xy$ , atunci avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot x \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 4x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 2xy + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot y^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 4xy + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} (2x^2 + 2y^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot yx + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 1 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 4y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 2xy + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot x^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2\end{aligned}$$

Dacă facem convenția să notăm formal

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} &\text{ în loc de } \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} &\text{ în loc de } \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \text{ și} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} &\text{ în loc de } \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2,\end{aligned}$$



atunci expresiile derivatelor de ordinul doi ale funcțiilor compuse se rețin mai ușor sub forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\end{aligned}$$

unde prin ridicarea formală la pătrat a lui  $\frac{\partial h}{\partial x}$  înțelegem

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{(2)} &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)^{(2)} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \text{ etc.}\end{aligned}$$

De pildă în exemplul de mai sus

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{(2)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y\right)^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 4x^2 + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot y^2 \text{ etc.}$$

#### 4.7. Formula Taylor. Extremele funcțiilor de mai multe variabile

Pentru orice două puncte  $a, b \in \square^n$ , notăm cu  $[a, b] = \{(1-t)a + tb; t \in [0, 1]\}$ . Mulțimea  $[a, b]$  se numește segmentul închis de capete  $a$  și  $b$ . Segmentul deschis se notează cu  $(a, b) = \{(1-t)a + tb; t \in (0, 1)\}$ .

**Definiția 4.7.1.** O mulțime  $C \subset \square^n$  se numește convexă dacă  $\forall a, b \in C$  rezultă că  $[a, b] \subset C$ .

**Observația 4.7.1.** Orice bilă deschisă (închisă) din  $\square^n$  este o mulțime convexă.

Într-adevăr, fie  $x, y \in B(a, r) = \{x \in \square^n; \|x - a\| < r\}$ . Atunci  $\|x - a\| < r$  și  $\|y - a\| < r$ . Pentru orice  $t \in [0, 1]$  avem

$$\begin{aligned}\|(1-t)x+ty-a\| &= \|(1-t)(x-a)+t(y-a)\| \leq \\ &\leq (1-t)\|x-a\|+t\|y-a\| < (1-t)r+tr=r.\end{aligned}$$

Din Observația 4.7.1 rezultă orice interval din  $\mathbb{R}$ , orice disc (pătrat) din  $\mathbb{R}^2$ , orice sferă (cub) din  $\mathbb{R}^3$  este o mulțime convexă.

**Teorema 4.7.1 (Taylor).** Fie  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in A$  un punct interior și  $r > 0$  astfel încât  $V = B(a, r) \subset A$ .

Dacă  $f \in C^{m+1}(V)$ , atunci, pentru orice  $x \in V$ , există  $\xi \in (a, x)$  astfel încât

$$\begin{aligned}f(a+h) &= f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(h) + \frac{1}{2!}d^2f(a)(h) + \dots + \frac{1}{m!}d^mf(a)(h) + \\ &+ \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(\xi)(h), \text{ unde } h = x - a.\end{aligned}$$

*Demonstrație*

Pentru simplificarea scrierii facem demonstrația în cazul particular  $n = 2$ .

Fie  $a = (a_1, a_2) \in A$ ,  $x = (x_1, x_2) \in V$  fixat și  $h = (h_1, h_2) = x - a$ . Pentru orice  $t \in [0, 1]$  notăm cu

$$\begin{aligned}u_1(t) &= a_1 + th_1 = a_1 + t(x_1 - a_1) \\ u_2(t) &= a_2 + th_2 = a_2 + t(x_2 - a_2)\end{aligned}$$

și considerăm funcția compusă

$$g(t) = f[u_1(t), u_2(t)], \quad t \in [0, 1].$$

Evident,  $g$  este o funcție de clasă  $C^{m+1}$  pe  $[0, 1]$  și conform formulei Mac Laurin, există  $0 < \theta < 1$  astfel încât

$$g(1) = g(0) + \frac{1}{1!}g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \dots + \frac{1}{m!}g^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}g^{(m+1)}(\theta). \quad (4.23)$$

Observăm că

$$g(1) = f(x) = f(a+h) \text{ și } g(0) = f(a) \quad (4.24)$$

Pe de altă parte avem:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}[u_1(t), u_2(t)] \cdot u_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}[u_1(t), u_2(t)] \cdot u_2'(t)$$

sau 
$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}[u_1(t), u_2(t)] \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}[u_1(t), u_2(t)] \cdot h_2,$$

deci 
$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 = df(a)(h). \quad (4.25)$$

De asemenea, din Teorema 4.6.1 rezultă

$$\begin{aligned}
g''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} [u_1(t), u_2(t)] \cdot (u_1'(t))^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} [u_1(t), u_2(t)] \cdot u_1'(t) u_2'(t) + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} [u_1(t), u_2(t)] \cdot (u_2'(t))^2 + \frac{\partial f}{\partial x_1} [u_1(t), u_2(t)] \cdot u_1''(t) + \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_2} [u_1(t), u_2(t)] \cdot u_2''(t)
\end{aligned}$$

Deoarece  $u_1''(t) = u_2''(t) = 0$  rezultă:

$$g''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) h_2^2 = d^2 f(a)(h) \quad (4.26)$$

Se poate arăta că

$$g^{(k)}(0) = d^k f(a)(h), \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}^* \quad (4.27)$$

Dacă notăm cu  $\xi = a + \theta h$  și ținem seama de (4.24)-(4.27) în (4.23) obținem:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{1}{1!} df(a)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(a)(h) + \dots + \frac{1}{m!} d^m f(a)(h) + \\
&+ \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(\xi)(h),
\end{aligned}$$

unde  $\xi \in (a, x)$ , adică formula din enunțul teoremei.

**Teorema 4.7.2 (Lagrange).** Fie  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in A$  un punct interior și  $V$  o vecinătate convexă și deschisă a punctului  $a$ ,  $V \subset A$ . Dacă  $f \in C^1(V)$ , atunci pentru orice  $x \in V$ , există  $\xi \in (a, x)$  astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi)(x_n - a_n).$$

Demonstrația rezultă imediat din formula Taylor, pentru cazul particular  $m = 0$ . În cazul  $n = 2$  obținem:

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \xi_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi_1, \xi_2)(x_2 - a_2).$$

**Definiția 4.7.2.** Fie  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  și  $a \in A$ . Spunem că punctul  $a$  este un punct de maxim (minim) local pentru  $f$  dacă există o vecinătate  $V$  a punctului  $a$  astfel încât  $f(x) \leq f(a)$  [respectiv  $f(x) \geq f(a)$ ], oricare ar fi  $x \in V$ .

Ca și la funcțiile de o variabilă, un punct de maxim (minim) local se numește punct de extrem local.

**Definiția 4.7.3.** Fie  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  și  $a \in A$  un punct interior. Dacă  $f$  este diferențiabilă în punctul  $a$  și  $df(a) = 0$ , atunci  $x = a$  se numește punct critic pentru  $f$ .

**Teorema 4.7.3.** Fie  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  și  $a \in A$  un punct interior. Dacă  $a$  este punct de extrem local pentru  $f$  și dacă  $f$  este diferențiabilă în punctul  $a$ , atunci  $a$  este punct critic pentru  $f$ .

*Demonstrație*

Fie  $A_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in A\}$  și fie funcția de o variabilă  $\varphi_i: A_i \rightarrow \mathbb{R}$ , definită astfel  $\varphi_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ ,  $t \in A_i$ .

Evident,  $\varphi_i$  este derivabilă în punctul  $t = a_i$  și acest punct este punct de extrem local pentru  $\varphi_i$ . Din Teorema Fermat rezultă că  $\varphi'_i(a_i) = 0$ , deci  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ , pentru orice  $i = \overline{1, n}$ . Așadar,  $df(a) = 0$ , deci  $x = a$  este punct critic pentru  $f$ .

Ca și în cazul funcțiilor de o variabilă, nu orice punct critic este punct de extrem local. Următoarea teoremă stabilește condiții suficiente pentru ca un punct critic să fie punct de extrem local.

**Teorema 4.7.4.** Fie  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in A$  un punct interior  $r > 0$  și  $V = B(a, r) \subset A$ . Mai presupunem că  $f \in C^2(V)$  și că punctul  $x = a$  este punct critic pentru  $f$ . Atunci

(i) Dacă  $d^2 f(a)$  este pozitiv definită, punctul  $a$  este punct de minim local pentru  $f$ .

(ii) Dacă  $d^2 f(a)$  este negativ definită, punctul  $a$  este punct de maxim local pentru  $f$ .

(iii) Dacă  $d^2 f(a)$  este alternantă în orice vecinătate a punctului  $a$ , punctul  $a$  nu este punct de extrem local pentru  $f$ .

*Demonstrație*

Fie  $x \in V$  oarecare fixat și  $h = x - a$ . Din formula Taylor rezultă că există  $\xi \in (a, x)$  astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(\xi)(h).$$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(\xi)(h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) h_i h_j.$$

În continuare dacă notăm cu  $\alpha_i = \frac{h_i}{\|h\|_2}$ , atunci  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$  și

$$f(x) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \alpha_i \alpha_j. \quad (4.28)$$

Dacă notăm cu  $\omega(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] \alpha_i \alpha_j$  și ținem seamă

că  $f \in C^2(V)$ , rezultă că  $\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0$  și formula (4.28) devine

$$f(x) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2} \left[ d^2 f(a)(\alpha) + \omega(x) \right].$$

Fie  $S = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \square^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$ . Evident  $S$  este o mulțime închisă

și mărginită, deci compactă. Aplicația  $\alpha \rightarrow d^2 f(a)(\alpha): S \rightarrow \square$  este continuă (fiind o funcție polinomială), deci este mărginită și își atinge marginile pe  $S$ . Presupunem că  $d^2 f(a)$  este pozitiv definită.

Fie  $\alpha_0 \in S$  astfel încât  $m = \inf_{\alpha \in S} d^2 f(a)(\alpha) = d^2 f(a)(\alpha_0) > 0$ . Cum

$\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0$ , rezultă că există o vecinătate  $V_1$  a punctului  $a$ ,  $V_1 \subset V$  astfel încât

$|\omega(x)| < \frac{m}{2}, \forall x \in V_1$ . Așadar, pentru orice  $x \in V_1$  avem:

$$f(x) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2} \left[ d^2 f(a)(\alpha) + \omega(x) \right] > \frac{\|h\|^2}{2} \left( m - \frac{m}{2} \right) \geq 0.$$

Rezultă că  $f(x) \geq f(a), \forall x \in V_1$ , deci  $a$  este punct de minim local pentru  $f$ .

Dacă  $d^2 f(a)$  este negativ definită, se demonstrează la fel că există o vecinătate  $V_2$  a punctului  $a$ ,  $V_2 \subset V$  astfel încât  $f(x) \leq f(a), \forall x \in V_2$ , deci  $a$  este punct de maxim local pentru  $f$ . În cazul (iii) diferența  $f(x) - f(a)$  nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a punctului  $a$ , deci punctul  $a$  nu este punct de extrem local pentru  $f$ .

**Exemple.** Să se afle punctele de extrem local ale funcțiilor

$$1. f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z$$

Punctele critice se află rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Rezultă un singur punct critic  $a = (-1, -2, 2)$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$

$$d^2 f(a) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$\Delta_1 = 2 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Rezultă că  $d^2 f(a)$  este pozitiv definită, deci punctul  $a = (-1, -2, 2)$  este un punct de minim local.

$$2. \quad f(x, y) = x^3 + y^3 + 21xy + 36x + 36y.$$

Punctele critice sunt  $M_1(-4, -4)$  și  $M_2(-3, -3)$ .

$$d^2 f(x, y) = 6xdx^2 + 42dxdy + 6ydy^2$$

$$d^2 f(-4, -4) = -24dx^2 + 42dxdy + 24dy^2$$

$$\Delta_1 = -24 < 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -24 & 21 \\ 21 & -24 \end{vmatrix} > 0.$$

Rezultă că  $d^2 f(-4, -4)$  este negativ definit, deci punctul  $M_1(-4, -4)$  este punct de maxim local.

$$d^2 f(-3, -3) = -18dx^2 + 42dxdy - 18dy^2$$

$$\Delta_1 = -18; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -18 & 21 \\ 21 & -18 \end{vmatrix} < 0.$$

$d^2 f(-3, -3)$  este alternantă, deci punctul  $(-3, -3)$  nu este punct de extrem local.

$$3. \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y.$$

Punctele critice sunt  $M_1(\sqrt{2}, -2)$ ,  $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $M_3(0, 0)$ .

$$d^2 f(M_1) = 20dx^2 + 8dxdy + 20dy^2; \quad \Delta_1 = 20 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0.$$

$M_1(\sqrt{2}, -2)$  este punct de minim local.

$d^2 f(M_2) = d^2 f(M_1)$ , deci  $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  este de asemenea punct de minim local.

$$d^2 f(0, 0) = -4dx^2 + 8dxdy - 4dy^2$$

$$\Delta_1 = -4 < 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Deoarece  $\Delta_2 = 0$ , nu putem aplica Teorema 4.7.4. Ne putem da seama dacă punctul  $M_3(0, 0)$  este sau nu punct de extrem plecând de la definiție.

Într-adevăr, observăm că  $f(0, 0) = 0$ ,  $f(x, 0) = x^2(x^2 - 2)$  și  $f(x, x) = 2x^4$ . Rezultă că în orice vecinătate a punctului  $(0, 0)$  există puncte în care  $f > 0$  și puncte în care  $f < 0$ , în timp ce  $f(0, 0) = 0$ . Așadar,  $(0, 0)$  nu este punct de extrem local pentru  $f$ .

#### 4.8. Teorema de inversiune locală

**Definiția 4.8.1.** Fie  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  două mulțimi deschise. O funcție  $F: A \rightarrow B$  se numește difeomorfism dacă

a)  $F$  este bijectivă

b)  $F \in C^1(A)$

c)  $F^{-1} \in C^1(B)$

O astfel de definiție este necesară deoarece există funcții care îndeplinesc condițiile a) și b) dar nu îndeplinesc condiția c).

Într-adevăr, fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ . Evident  $f$  este bijectivă și  $F \in C^1(\mathbb{R})$ . Inversa sa  $f^{-1}$  nu este difeomorfism, deoarece nu este diferențiabilă în  $y = 0$ , deci  $f^{-1} \notin C^1(\mathbb{R})$ .

**Observația 4.8.1.** Fie  $A, B$  și  $D$  mulțimi deschise din  $\mathbb{R}^n$  și  $F: A \rightarrow B$ ,  $G: B \rightarrow D$  difeomorfism. Atunci  $H = G \circ F: A \rightarrow D$  este difeomorfism.

Afirmația rezultă din faptul că o compunere de funcții de clasă  $C^1$  este de asemenea o funcție de clasă  $C^1$  și din observația că  $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$ .

Cel mai simplu exemplu de difeomorfism este operatorul de translație. Fie  $y \in \mathbb{R}^n$  oarecare fixat și fie  $\tau_y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definit prin  $\tau_y(x) = x + y$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Evident  $\tau_y \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\tau_y$  este bijectivă și  $\tau_y^{-1} = \tau_{-y} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

Următorul rezultat este cunoscut sub numele de teorema de inversiune locală pentru funcții de o variabilă.

**Teorema 4.8.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$  o mulțime deschisă,  $a \in A$  și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f \in C^1(A)$  și  $f'(a) \neq 0$ , atunci există o vecinătate deschisă  $U$  a punctului  $a$  cu proprietățile:  $U \subset A$ ,  $f'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in U$  și  $f: U \rightarrow V = f(U)$  este difeomorfism.

*Demonstrație*

Presupunem că  $f'(a) > 0$ . Cum  $f'$  este continuă în  $a$ , rezultă că există un interval deschis  $U$  care conține punctul  $a$  și  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in U$ .

Dacă notăm cu  $V = f(U)$ , atunci  $V$  este un interval deschis și  $f: U \rightarrow V$  este bijectivă (fiind strict crescătoare). Se știe de la liceu că dacă  $f' \neq 0$  pe  $U$ , atunci  $f^{-1}: V \rightarrow U$  este derivabilă pe  $V$  și  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ ,  $\forall y \in V$ ,  $y = f(x)$ . Evident,  $f^{-1} \in C^1(V)$ , deci  $f$  este difeomorfism.

În continuare prezentăm teorema de inversiune locală pentru funcții vectoriale.

**Teorema 4.8.2.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă,  $a \in A$  și  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dacă  $F \in C^1(A)$  și  $\det J_F(a) \neq 0$ , atunci există o vecinătate deschisă  $U$  a punctului  $a$  cu proprietățile:  $U \subset A$ ,  $\det J_F(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in U$ ,  $F: U \rightarrow V = F(U)$  este difeomorfism și

$$\det J_{F^{-1}}(y) = \frac{1}{\det J_F(x)}, \quad \forall y \in V, y = F(x).$$

*Demonstrație*

Pentru început facem observația că putem presupune că  $a = 0$  și că  $F(0) = 0$ . Într-adevăr, fie  $A_1 = \{x - a; x \in A\}$  și fie  $F_1: A_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F_1(t) =$



$= F(t+a) - b$ ,  $t \in A_1$ , unde  $b = F(a)$ . Avem  $F_1(0) = 0$  și  $F = \tau_b \circ F_1 \circ \tau_{-a}$ . Dacă vom arăta că  $F_1$  este difeomorfism va rezulta că și  $F$  este difeomorfism, deoarece translațiile sunt difeomorfisme.

Observăm de asemenea că putem presupune că  $dF(0) = I$  (operatorul identitate pe  $\square^n$ ).

Într-adevăr, fie  $T = dF(0)$  și fie  $F_2 = T^{-1} \circ F$ . Deoarece diferențiala de ordinul întâi a oricărei aplicații liniare este aceea aplicație liniară însăși, rezultă că

$$dF_2(0) = T^{-1} \circ dF(0) = I.$$

Așadar  $F = T \circ F_2$  și  $dF_2(0) = I$ .

Cum  $\det J_F(0) \neq 0$  prin ipoteză, rezultă că  $T = dF(0): \square^n \rightarrow \square^n$  este difeomorfism. Prin urmare, dacă  $F_2$  este difeomorfism, atunci și  $F$  este difeomorfism.

Fie deci  $F: A \subset \square^n \rightarrow \square^n$ ,  $0 \in A$ ,  $F(0) = 0$  și  $dF(0) = I$ .

Dacă notăm cu  $H(x) = F(x) - x$ ,  $\forall x \in A$ , atunci  $H \in C^1(A)$ ,  $H(0) = 0$  și  $dH(0) = 0$ . Cum componentele scalare  $h_1, \dots, h_n$  ale funcției vectoriale  $H$  sunt de clasă  $C^1$  pe  $A$  și  $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(0) = 0$ , rezultă că există  $\delta_1 > 0$  astfel încât

$$\left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(t) \right| < \frac{1}{2n\sqrt{n}}, \quad \forall t \in B(0, \delta_1) \subset A, \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Conform teoremei Lagrange, pentru orice  $x, y \in B(0, \delta_1)$  există un punct  $\xi_i$  pe segmentul deschis de capete  $x$  și  $y$  astfel încât

$$\begin{aligned} |h_i(x) - h_i(y)| &= \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_1}(\xi_i)(x_1 - y_1) + \dots + \frac{\partial h_i}{\partial x_n}(\xi_i)(x_n - y_n) \right| \leq \\ &\leq \left( \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_1}(\xi_i) \right| + \dots + \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_n}(\xi_i) \right| \right) \|x - y\| < \frac{1}{2\sqrt{n}} \|x - y\|. \end{aligned}$$

(Norma folosită în această demonstrație este  $\|\cdot\|_2$ ).

Așadar avem:  $\|H(x) - H(y)\| < \frac{1}{2} \|x - y\|$ .

Fie  $0 < \delta < \delta_1$  astfel încât  $K = \overline{B(0, \delta)} \subset B(0, \delta_1) \subset A$ . Rezultă că:

$$\|H(x) - H(y)\| < \frac{1}{2} \|x - y\|, \quad \forall x, y \in K. \quad (4.29)$$

În particular, pentru  $y = 0$  avem

$$\|H(x)\| < \frac{1}{2} \|x\| \leq \frac{\delta}{2}, \quad \forall x \in K. \quad (4.30)$$

Fie  $V_1 = B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$  și  $U_1 = B(0, \delta) \cap F^{-1}(V_1)$ . Observăm că  $V_1$  și  $U_1$  sunt mulțimi deschise,  $0 \in U_1$  și  $F(U_1) \subset V_1$ . Vom arăta că  $F: U_1 \rightarrow V_1$  este bijectivă.

Într-adevăr, dacă  $F(x) = F(y)$ , unde  $x, y \in U_1$  atunci  $H(x) + x = H(y) + y$  și ținând seama de (4.29) rezultă  $\|x - y\| = \|H(x) - H(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$ , inegalitate care nu poate avea loc decât dacă  $\|x - y\| = 0$ , adică  $x = y$ .

Așadar, am dovedit că  $F: U_1 \rightarrow V_1$  este injectivă.

Pentru a arăta că este și surjectivă folosim teorema de punct fix a lui Banach. Pentru orice  $y \in V_1$  considerăm funcția  $\phi_y: K \rightarrow K$ , definită astfel:  $\phi_y(x) = y - H(x)$ ,  $\forall x \in K$ .

Din (4.29) rezultă că

$$\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in K.$$

Pe de altă parte, din (4.30) avem:

$$\|\phi_y(x)\| \leq \|y\| + \|H(x)\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \quad \forall x \in K.$$

Așadar,  $\phi_y: K \rightarrow K$  este o contracție. Din Teorema de punct fix a lui Banach, rezultă că există  $z \in K$  unic astfel încât  $z = \phi_y(z)$ .

Evident,  $z$  depinde de  $y$  și de aceea vom nota  $z = G(y)$ . Ținând seama de definițiile funcțiilor  $\phi_y$  și  $H$  avem

$$G(y) = y - H[G(y)], \quad \forall y \in V_1 \quad (4.31)$$

$$\text{și} \quad F[G(y)] = y, \quad \forall y \in V_1 \quad (4.32)$$

Pe de altă parte din (4.30) și (4.31) rezultă

$$\|G(y)\| \leq \|y\| + \|H[G(y)]\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \quad (4.33)$$

Din (4.32) și (4.33) deducem că  $G(y) \in B(0, \delta) \cap F^{-1}(V_1) = U_1$ , deci  $G: V_1 \rightarrow U_1$  și  $F \circ G = I$ . Prin urmare am arătat că  $F: U_1 \rightarrow V_1$  este surjectivă, deci bijectivă și  $F^{-1} = G$ . Din (4.29) și (4.31) rezultă

$$\begin{aligned} \|G(y_1) - G(y_2)\| &\leq \|y_1 - y_2\| + \|H[G(y_1)] - H[G(y_2)]\| < \\ &< \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|G(y_1) - G(y_2)\| \end{aligned}$$

$$\text{sau} \quad \|G(y_1) - G(y_2)\| < 2\|y_1 - y_2\|, \quad \forall y_1, y_2 \in V_1. \quad (4.34)$$

Din (4.34) deducem că  $G$  este uniform continuă pe  $V_1$ , deci continuă pe  $V_1$ .

Cum  $\det J_F(0) > 0$  și  $F \in C^1(A)$  rezultă că există o vecinătate  $U$  a originii,  $U \subset U_1 \subset A$  astfel încât  $\det J_F(x) > 0$ ,  $\forall x \in U$ . Dacă notăm cu  $V = G^{-1}(U)$ , atunci  $V \subset V_1$ ,  $V$  este deschisă pentru că  $G$  este continuă și  $V = F(U)$ .

Pentru a arăta că  $F: U \rightarrow V$  este difeomorfism rămâne să arătăm că  $G \in C^1(V)$ .

Fie  $b \in V$  oarecare fixat. Vom arăta că  $G$  este diferențiabilă în  $b$ . Pentru aceasta fie  $y \in V$  și  $x, c \in U$  astfel încât  $y = F(x)$ ,  $b = F(c)$ . Deoarece  $F$  este diferențiabilă în  $c$  avem:

$$y - b = F(x) - F(c) = dF(c)(x - c) + \varphi(x - c),$$

unde 
$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\varphi(x - c)}{\|x - c\|} = 0. \quad (4.35)$$

Cum  $\det J_F(c) \neq 0$ , rezultă că  $\text{rang } J_F(c) = n$  și deci că  $dF(c): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  este un izomorfism liniar. Dacă notăm cu  $S = [dF(c)]^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , atunci avem

$$S(y - b) = x - c + S[\varphi(x - c)].$$

Cum  $x = G(y)$  și  $c = G(b)$ , mai departe avem:

$$\begin{aligned} \frac{\|G(y) - G(b) - S(y - b)\|}{\|y - b\|} &= \frac{\|S[\varphi(x - c)]\|}{\|y - b\|} \leq \frac{\|J_S(b)\| \|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|} \cdot \frac{\|x - c\|}{\|y - b\|} = \\ &= \|J_S(b)\| \cdot \frac{\|G(y) - G(b)\|}{\|y - b\|} \cdot \frac{\|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|} \leq 2\|J_S(b)\| \cdot \frac{\|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|}. \end{aligned}$$

(Pentru ultima inegalitate am folosit (4.34)).

Cum  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0$ , rezultă că  $G$  este diferențiabilă în punctul  $b$  și că

$$dG(b) = S.$$

Pe de altă parte avem  $G \circ F = I = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$ . Rezultă că  $J_G(b) \cdot J_F(c) = I_n$  (matricea unitate),  $\forall c \in U$ ,  $b \in V$ ,  $b = F(c)$ . Cum  $\det J_F(c) \neq 0$ , deducem că

$$J_{F^{-1}}(b) = J_G(b) = [J_F(c)]^{-1}, \text{ deci } G = F^{-1} \in C^1(V).$$

## 4.9. Transformări regulate

**Definiția 4.9.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și fie  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Spunem că  $F$  este o transformare regulată în punctul  $a \in A$ , dacă  $\det J_F(a) \neq 0$  și există o

vecinătate deschisă  $U$  a lui  $a$ ,  $U \subset A$  astfel încât  $F \in C^1(U)$ . Spunem că  $F$  este o transformare regulată pe mulțimea  $A$ , dacă  $F$  este regulată în fiecare punct din  $A$ .

**Propoziția 4.9.1.** Dacă  $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  este o transformare regulată în punctul  $a \in A$ , atunci  $F$  este continuă în punctul  $a$ .

*Demonstrație*

Dacă  $F$  este o transformare regulată în punctul  $a$ , atunci conform Teoremei 4.1.3,  $F$  este diferențiabilă în  $a$ , deci continuă în  $a$ .

**Definiția 4.9.2.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și fie  $F = (f_1, \dots, f_n): A \rightarrow \mathbb{R}^n$  o funcție de clasă  $C^1$ .

Determinantul matricei iacobiene  $J_F(a)$  se numește iacobianul funcției  $F$  în punctul  $a$  și se notează cu  $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a)$ . Așadar avem:

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}, \quad a \in A.$$

**Propoziția 4.9.2.** Fie  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  mulțimi deschise. Dacă  $F: A \rightarrow B$  este transformare regulată în punctul  $a \in A$  și  $G: B \rightarrow \mathbb{R}^n$  este transformare regulată în punctul  $b = F(a) \in B$ , atunci funcția compusă  $H = G \circ F$  este transformare regulată în punctul  $a \in A$ .

*Demonstrație*

Prin ipoteză  $\det J_F(a) = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) \neq 0$  și există o vecinătate  $U$  a punctului  $a$ ,  $U \subset A$  astfel încât  $F \in C^1(U)$ . De asemenea, există o vecinătate deschisă  $V$  a punctului  $b = F(a) \in B$ ,  $V \subset B$  astfel încât  $G \in C^1(V)$  și  $\det J_G(b) = \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(b) \neq 0$ .

Deoarece  $F$  este continuă în punctul  $a$ , rezultă că există o vecinătate deschisă  $U_1$  a lui  $a$ ,  $U_1 \subset U$  astfel încât  $F(U_1) \subset V$ . Evident  $H = G \circ F$  este de clasă  $C^1$  pe  $U_1$ . Pe de altă parte avem  $\det J_H(a) = \det J_G(b) \det J_F(a) \neq 0$ , deci  $H$  este transformare regulată în punctul  $a \in A$ .

Dacă notăm cu  $h_1, \dots, h_n$  componentele scalare ale lui  $H$  obținem egalitatea:

$$\frac{D(h_1, \dots, h_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) = \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(b) \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

Teorema următoare pune în evidență o proprietate remarcabilă a transformărilor regulate și anume faptul că imaginea directă a unei mulțimi deschise, printr-o transformare regulată este de asemenea o mulțime deschisă.

**Teorema 4.9.1.** Fie  $F: \square^n \rightarrow \square^n$  o transformare regulată pe  $\square^n$ . Dacă  $A \subset \square^n$  este deschisă, atunci  $F(A)$  este de asemenea o mulțime deschisă.

*Demonstrație*

Fie  $b \in F(A)$  și  $a \in A$  astfel încât  $b = F(a)$ . Din Teorema de inversiune locală rezultă că există o vecinătate deschisă  $U$  a punctului  $a$ ,  $U \subset A$  și o vecinătate deschisă  $V = F(U)$  a punctului  $b$ , astfel încât  $F: U \rightarrow V$  este difeomorfism.

Evident,  $V \subset F(A)$ , deci  $b$  este punct interior pentru mulțimea  $F(A)$ . Cum  $b$  a fost arbitrar, rezultă că  $F(A)$  este deschisă.

**Definiția 4.9.3.** O mulțime din  $\square^n$ , deschisă și conexă se numește **domeniu**.

**Propoziția 4.9.3.** Fie  $F: \square^n \rightarrow \square^n$  o transformare regulată pe  $\square^n$ . Dacă  $D \subset \square^n$  este un domeniu, atunci  $F(D)$  este de asemenea un domeniu și iacobianul  $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$  păstrează semn constant pe  $D$ .

*Demonstrație*

Faptul că  $F(D)$  este deschisă rezultă din Teorema 4.9.1. Pe de altă parte, din Propoziția 4.9.1 rezultă că  $F$  este continuă pe  $\square^n$ . Cum o funcție continuă duce o mulțime conexă într-o mulțime conexă, rezultă că  $F(D)$  este conexă, deci  $F(D)$  este un domeniu.

Deoarece funcția  $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}: \square^n \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $D$  este o mulțime conexă, rezultă că  $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(D)$  este o mulțime conexă din  $\mathbb{R}$ , deci un interval. Dacă presupune, că există  $u, v \in D$  astfel încât  $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(u) < 0$  și

$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(v) > 0$ , atunci rezultă că există  $w \in D$  astfel încât  $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(w) = 0$ , ceea ce contrazice ipoteza că  $F$  este regulată.

#### 4.10. Funcții implicite

Fie dreptunghiul  $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  și ecuația

$$F(x, y) = 0, (x, y) \in D \quad (4.36)$$

Ne punem întrebarea dacă pentru orice  $x \in [a, b]$ , există o singură valoare  $y \in [c, d]$ , astfel încât perechea  $(x, y)$  să verifice ecuația (4.36). În cazul când acest lucru are loc, vom nota valoarea  $y$  corespunzătoare lui  $x$  cu  $y(x)$ . Funcția  $x \rightarrow y(x): [a, b] \rightarrow [c, d]$  se spune că este definită implicit de ecuația (4.36). Evident avem

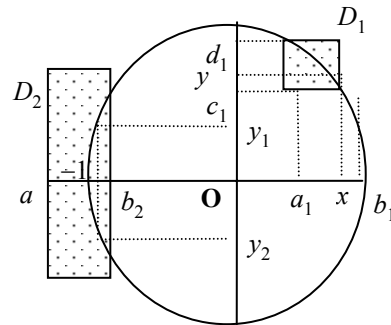
$$F[x, y(x)] = 0, \forall x \in [a, b]. \quad (4.37)$$

**Exemplu.** Fie ecuația

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (4.38)$$

Mulțimea punctelor din plan care verifică ecuația (4.38) reprezintă din punct de vedere geometric cercul  $C(0;1)$  (cu centrul în origine și de rază 1).

Fie  $D_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$ . Se observă că  $\forall x \in [a_1, b_1]$  există o singură valoare  $y = y(x) \in [c_1, d_1]$  astfel încât perechea  $(x, y)$  verifică ecuația (4.38), adică punctul  $(x, y)$  aparține cercului  $C(0;1)$  și anume  $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Rezultă că pe dreptunghiul  $D_1$  ecuația (4.38) definește o funcție implicită.



Pe de altă parte, observăm că pe dreptunghiul  $D_2$ , ecuația (4.38) nu definește nici o funcție implicită de forma  $y = y(x)$ , deoarece pentru  $x \in [a_2, -1]$  nu există nici o valoare  $y$  astfel încât perechea  $(x, y) \in C(0,1)$ , iar pentru  $\forall x \in [-1, b_2]$

există două valori  $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$  și  $y_2 = \sqrt{1-x^2}$  astfel încât punctele  $(x, y_1)$  și  $(x, y_2)$  aparțin cercului  $\mathbf{C}(0,1)$ .

Următoarea teoremă stabilește condiții suficiente pentru existența funcțiilor implicite.

**Teorema 4.10.1** Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime deschisă,  $(a,b) \in A$  și  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietățile:

- a)  $F \in C^1(A)$
- b)  $F(a,b) = 0$
- c)  $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ .

Atunci există o vecinătate deschisă  $U$  a punctului  $a$ , o vecinătate deschisă  $V$  a punctului  $b$ , astfel încât  $U \times V \subset A$  și o funcție unică  $f: U \rightarrow V$  cu proprietățile:

- a')  $F[x, f(x)] = 0, \forall x \in U$
- b')  $F(a) = b$

$$c') F \in C^1(U) \text{ și } f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}[x, f(x)]}{\frac{\partial F}{\partial y}[x, f(x)]}, \forall x \in U.$$

Dacă  $F \in C^p(A)$ , atunci  $f \in C^p(U)$ .

*Demonstrație*

Considerăm funcția vectorială  $\phi = (\phi_1, \phi_2): A \rightarrow \mathbb{R}^2$  definită astfel:

$$\phi(x, y) = (x, F(x, y)), \forall (x, y) \in A.$$

Evident avem

$$\phi_1(x, y) = x \text{ și } \phi_2(x, y) = F(x, y), \forall (x, y) \in A \text{ și}$$

$$J_\phi(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$\det J_\phi(a, b) = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0,$$

matricea  $J_\phi(a, b)$  este inversabilă. Din condiția b) rezultă  $\phi(a, b) = (a, 0)$ .

Conform Teoremei 4.8.2 (de inversiune locală) există o vecinătate deschisă  $U \times V$  a punctului  $(a, b)$  și o vecinătate deschisă  $U \times W$  a punctului  $(a, 0)$  astfel încât  $\phi: U \times V \rightarrow U \times W$  este difeomorfism. Mai mult,

$$\det J_\phi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in U \times V.$$

Fie  $\psi = (\psi_1, \psi_2) = \phi^{-1}: U \times W \rightarrow U \times V$ . Atunci  $\psi$  este de clasă  $C^1$  pe  $U \times W$ .

Definim  $f(x) = \psi_2(x, 0)$ ,  $\forall x \in U$ . Evident  $f: U \rightarrow V$ ,  $f \in C^1(U)$  și  $f(a) = \psi_2(a, 0) = b$ . În continuare, pentru  $\forall x \in U$  avem:

$$(x, 0) = \phi[\psi(x, 0)] = \phi[\psi_1(x, 0), \psi_2(x, 0)] = \phi[x, f(x)] = (x, F(x, f(x))),$$

de unde rezultă

$$F[x, f(x)] = 0, \forall x \in U. \quad (4.39)$$

Derivând relația (4.39) obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}[x, f(x)] + \frac{\partial F}{\partial y}[x, f(x)]f'(x) = 0,$$

de unde rezultă

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}x, f(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}x, f(x)}, \forall x \in U.$$

În continuare prezentăm fără demonstrații două generalizări importante ale Teoremei 4.10.1 (Teorema 4.10.1 și Teorema 4.10.3).

**Teorema 4.10.2.** Fie  $A \subset \square^{n+1}$  o mulțime deschisă,  $(a, b) = (a_1, \dots, a_n, b) \in A$  și  $F = (x_1, \dots, x_n, y): A \rightarrow \square$  cu proprietățile:

- 1)  $F \in C^1(A)$
- 2)  $F(a_1, \dots, a_n, b) = 0$
- 3)  $\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$ .

Atunci există o vecinătate deschisă  $U$  a punctului  $(a_1, \dots, a_n)$  și o vecinătate deschisă  $V$  a punctului  $b$ , astfel încât  $U \times V \subset A$  și o funcție unică  $f: U \rightarrow V$  cu proprietățile:

- 1')  $F[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)] = 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in U$



$$3^{\circ}) \quad f \in C^1(U) \text{ ş i } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}[x, f(x)]}{\frac{\partial F}{\partial y}[x, f(x)]}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in U, \quad i = \overline{1, n}.$$

Avem

$$F(2,0,1)=0 \text{ \textbf{ ş i } } \frac{\partial F}{\partial z}(2,0,1)=-14 \neq 0.$$

Avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(2,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(2,0,1)} = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(2,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(2,0,1)} = 0\end{aligned}$$

**Teorema 4.10.3.** *Fie  $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$  o mulțime deschisă,*

*cu proprietățile:*

[illegible]



$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(1,2,-2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} (1,2,-2) = -50 \neq 0.$$

Așadar, sunt îndeplinite condițiile Teoremei 4.7.3, de unde rezultă că există o vecinătate  $U \in V(1)$ , o vecinătate  $V \times W$  a punctului  $(2, -2)$  și două funcții

$$y = f(x) : U \rightarrow V \text{ și } z = g(x) : U \rightarrow W$$

cu proprietățile 1'), 2') și 3').

În continuare avem:

$$\frac{D(F,G)}{D(x,z)}(1,2,-2) = -40 \text{ și } \frac{D(F,G)}{D(y,x)} = 60$$

de unde rezultă  $f'(1) = -\frac{4}{5}$  și  $g'(1) = \frac{6}{5}$ .

#### 4.11. Funcții dependente și independente

Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și  $m$  funcții  $f_1, \dots, f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^1$  pe  $A$ ,  $m \leq n$ .

**Definiția 4.11.1.** Spunem că funcțiile  $f_1, \dots, f_m$  sunt dependente pe mulțimea  $A$ , dacă cel puțin una dintre aceste funcții, de exemplu  $f_m$  depinde de celelalte pe mulțimea  $A$ , adică există  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^m)$  astfel încât  $f_m(x) = \phi[f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)]$ ,  $\forall x \in A$ .

**Exemplu.** Fie funcțiile  $f_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1,3}$  definite astfel:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

Se observă imediat că

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \phi[f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)],$$

unde

$$\phi(u, v) = u^2 - v, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Rezultă că funcțiile  $f_1, f_2, f_3$  sunt dependente pe  $\mathbb{R}^4$ .

**Observația 4.11.1.** La cursul de algebră se studiază noțiunea de funcții liniar dependente.

Reamintim că  $f_1, \dots, f_m$  sunt linear dependente pe  $A$ , dacă  $\exists m$  numere  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ , nu toate nule, astfel încât:

$$\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x) = 0, \quad \forall x \in A.$$

Dacă presupunem de exemplu că  $\lambda_m \neq 0$ , rezultă

$$f_m(x) = \left( -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} \right) f_1(x) + \dots + \left( -\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \right) f_{m-1}(x), \quad \forall x \in A.$$

Așadar, noțiunea de funcții linear dependente pe  $A$ , este un caz particular al Definiției 4.11.1 și anume, cazul când funcția  $\phi$  este liniară.

**Teorema 4.11.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  deschisă,  $m \leq n$  și  $F = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ , de clasă  $C^1$  pe  $A$ . Dacă  $f_1, \dots, f_m$  sunt dependente pe  $A$ , atunci

$$\text{rang } J_F(x) < m, \quad \forall x \in A.$$

*Demonstrație*

Fie  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^{m-1})$  astfel încât

$$f_m(x_1, \dots, x_n) = \phi[f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{m-1}(x_1, \dots, x_n)], \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in A. \quad (4.40)$$

Derivând relația (4.40) obținem:

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial y_{m-1}} \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.41)$$

Cum matricea iacobiană este

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

din (4.41) rezultă că ultima linie a matricei  $J_F(x)$  este combinație lineară de celelalte linii, deci orice minor de ordinul  $m$  al matricei  $J_F(x)$  este nul.

**Definiția 4.11.2.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  deschisă. Spunem că funcțiile  $f_1, \dots, f_m$  sunt independente în punctul  $a \in A$ , dacă nu sunt dependente pe nici o vecinătate a punctului  $a$ . Spunem că  $f_1, \dots, f_m$  sunt independente pe  $A$ , dacă sunt independente în fiecare punct din  $A$ .

Cu această definiție, din Teorema 4.11.1 rezultă

**Corolarul 4.11.1.** *Dacă  $\text{rang } J_F(x) = m, \forall x \in A$ , atunci funcțiile  $f_1, \dots, f_m$*

**Teorema 4.11.2.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  deschisă,  $a \in A$ ,  $m \leq n$  și

Fie  $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ . Deoarece  $J_F(a) = s < m$ ,  $\exists$  un minor nenul de ordinul  $s$

tricei  $J_F(a)$ . Fără a restrânge generalitatea putem presupune că minorul

$$\frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)}(a) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s}(a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_s}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s}(a) \end{vmatrix}} \neq 0.$$

rece  $f_i \in C^1(A)$  rezultă că funcția

$$\frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} : A \rightarrow \square \text{ este continuă pe } A,$$

Există o vecinătate deschisă  $U_1$  a punctului  $a$ ,  $U_1 \subset A$  astfel încât

$$\frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)}(x) \neq 0, \quad \forall \quad x \in U_1.$$

Din Corolarul 4.11.1 rezultă că funcțiile  $f_1, \dots, f_s$  sunt independente pe

Considerăm sistemul:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s) \equiv f_1(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) - y_1 = 0 \\ \vdots \\ F_s(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s) \equiv f_s(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) - y_s = 0 \end{array} \right. \quad (4.42)$$

Die  $a' = (a_1, \dots, a_c)$ ,  $a'' = (a_{c+1}, \dots, a_n)$  sei  $b = (b_1, \dots, b_c)$  und  $b_i = f_i(a)$ ,

Evident,  $F_i \in C^1\left(A \times \square^s\right)$  și,  $\forall \quad i = \overline{1, s}$ . Observăm de asemenea că

$$\frac{D(F_1, \dots, F_s)}{D(x_1, \dots, x_s)}(a', a'', b) = \frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)}(a) \neq 0.$$

Din Teorema 4.10.3 rezultă că din sistemul (4.42) putem explicita variabilele  $x_1, \dots, x_s$  în funcție de  $x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s$ . Mai precis există  $U'$  o vecinătate deschisă a punctului  $a'$ ,  $U'' \times V$  o vecinătate a punctului  $(a'', b)$  și o funcție unică  $G = (g_1, \dots, g_s): U'' \times V \rightarrow U'$  cu proprietățile:

$$g_i(a_{s+1}, \dots, a_n, b_1, \dots, b_s) = a_i, \quad i = \overline{1, s}. \quad (4.43)$$

$$\begin{cases} f_1[g_1(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), \dots, g_s(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), x_{s+1}, \dots, \\ \dots, x_n, y_1, \dots, y_s] = y_1 \\ \hline f_s[g_1(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), \dots, g_s(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), x_{s+1}, \dots, \\ \dots, x_n, y_1, \dots, y_s] = y_s \end{cases} \quad (4.44)$$

pentru  $\forall (x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s) \in U'' \times V$ . Fie  $U'_1 \subset U'$  o vecinătate deschisă a lui  $a'$  și  $U''_1 \subset U''$  o vecinătate deschisă a lui  $a''$  astfel încât  $U'_1 \times U''_1 \subset U_1$ . Deoarece  $U'_1 \in V(a')$  și  $G: U'' \times V \rightarrow U'$  este continuă în  $(a'', b)$  există  $U''_2 \times V_1 \subset U''_1 \times V$  vecinătate deschisă a punctului  $(a'', b)$  astfel încât  $G(U''_2 \times V_1) \subset U'_1$ .

Fie  $s < r \leq n$  și

$$\begin{aligned} & \phi_r(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s) = \\ & = f_r[g_1(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), \dots, g_s(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), x_{s+1}, \dots, x_n], \quad (4.45) \\ & \forall (x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s) \in U''_2 \times V_1. \end{aligned}$$

Vom arăta că  $\phi_r$  nu depinde de variabilele  $x_{s+1}, \dots, x_n$ . Fie  $s < k \leq n$ . Derivând relațiile (4.44) și (4.45) obținem

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \frac{\partial g_s}{\partial x_k} + \frac{\partial f_1}{\partial x_k} = 0 \\ \hline \frac{\partial f_s}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \frac{\partial g_s}{\partial x_k} + \frac{\partial f_s}{\partial x_k} = 0 \\ \hline \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \frac{\partial g_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_r}{\partial x_s} \frac{\partial g_s}{\partial x_k} + \frac{\partial f_r}{\partial x_k} = \frac{\partial \phi_r}{\partial x_k} \end{cases} \quad (4.46)$$

Derivatele  $\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$  sunt calculate într-un punct oarecare  $(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s) \in U_2'' \times V$ , iar  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  sunt calculate în punctul corespunzător  $(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n)$  unde

$$x_i = g_i(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), \quad i = \overline{1, s}.$$

Din cele de mai sus rezultă că punctul

$$(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) \in U_1' \times U_2'' \subset U_1,$$

deci

$$\frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)}(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

Pentru ca sistemul (4.46) să fie compatibil, trebuie ca determinantul caracteristic să fie nul, deci avem:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \hline \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_s} & \frac{\partial f_r}{\partial x_k} - \frac{\partial \phi_r}{\partial x_k} \end{vmatrix} = 0.$$

și mai departe

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \hline \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_s} & \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \end{vmatrix} - \frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x_k} = 0. \quad (4.47)$$

Deoarece  $\text{rang } J_F(x) = s$ , rezultă că primul determinat din relația (4.47) este nul. Cum

$$\frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} \neq 0$$

în final rezultă

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial x_k} = 0, \forall s < r \leq n \text{ și } \forall s < k \leq n \quad (4.48)$$

Așadar  $\phi_r$  nu depinde de  $x_{s+1}, \dots, x_n$ . Atunci, pentru  $(y_1, \dots, y_n) \in V_1$  din (4.45) rezultă

$$\phi_r(y_1, \dots, y_s) = f_r[x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n] = f_r(x), \forall x \in U'_1 \times U''_2.$$

Ținând seama și de (4.44) avem:

$$f_r(x) = \phi_r[f_1(x), \dots, f_s(x)], \forall x \in U'_1 \times U''_2.$$

Notând cu  $U = U'_1 \times U''_2$ , rezultă  $f_1, \dots, f_s, f_r$  sunt dependente pe  $U$  și cu aceasta teorema este demonstrată. Dacă ne întoarcem la exemplul dat constatăm că

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2(x_2 + x_3 + x_4) & 2(x_1 + x_3 + x_4) & 2(x_1 + x_2 + x_4) & 2(x_1 + x_2 + x_3) \end{pmatrix}.$$

Este ușor de verificat că toți minorii de ordinul 3 sunt nuli. Fie

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \square^4; x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} \text{ și } A = \square^4 \setminus M.$$

Dacă  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$ , atunci cel puțin unul din minorii

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

este  $\neq 0$ . Rezultă că  $f_1, f_2$  sunt independente pe  $A$ , în timp ce  $f_3$  depinde de  $f_1$  și  $f_2$  pe  $A$ .

#### 4.12. Extreme cu legături

În aplicații, intervine adesea problema determinării valorilor extreme ale unei funcții de mai multe variabile în situații în care variabilele sunt supuse la anumite restricții (satisfac anumite relații de legătură).

**Exemplu.** Să se găsească valorile extreme ale funcției  $f(x, y) = x^2 + y^2$  cu legătura  $x + y - 1 = 0$ . Cazul fiind foarte simplu, problema se reduce imediat la o problemă de extrem liber.

Într-adevăr, înlocuind  $y = 1 - x$  în expresia funcției  $f$ , obținem  $g(x) = x^2 - 2x + 1, x \in Y$ .



Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și  $f, F_1, \dots, F_m (1 \leq m < n)$ ,  $m+1$  funcții reale definite pe  $A$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (4.49)$$
$$f(x) \leq f(a) [f(x) \geq f(a)], \quad \forall x \in A \cap S \cap U.$$
[illegible]

### Demonstratie

Pentru a fixa ideile, să presupunem că  $a = (a_1, \dots, a_n)$  este punct de maxim pentru  $f$ , condiționat de (1). Atunci  $a \in A \cap S$  și  $\exists U$  o vecinătate deschisă a lui  $a$ ,  $U \subset A$  astfel încât  $f(x) \leq f(a)$ ,  $\forall x \in U \cap A \cap S$ .

se poate rezolva în raport cu variabilele  $x_1, \dots, x_m$ . Mai precis,  $\exists$  o vecinătate deschisă  $U'$  a punctului  $a'$  și o vecinătate deschisă  $U''$  a punctului  $a''$  și o funcție vectorială unică  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m): U'' \rightarrow U$  de clasă  $C^1$  pe  $U''$  cu proprietățile:

[illegible]

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune  $U' \times U'' \subset U$ . Fie  $m+1 \leq k \leq n$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} + \frac{\partial F_m}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = 0 \end{array} \right. \quad (4.53)$$
$$g(x_{m+1}, \dots, x_n) = f[\phi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n] \quad (4.54)$$
$$(\varphi_1(x''), \dots, \varphi_m(x''), x'') \in S \cap (U' \times U'') \subset S \cap U,$$
$$\begin{aligned} g(x'') &= f[\varphi_1(x''), \dots, \varphi_m(x''), x''] \leq f(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n) = \\ &= f[\varphi_1(a''), \dots, \varphi_m(a''), a''] = g(a''). \end{aligned}$$

Rezultă  $\frac{\partial g}{\partial x_k}(a'') = 0, \forall \quad m+1 \leq k \leq n$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = 0 \quad (4.55)$$





**Exemplu.** Să se afle punctele de extrem ale funcției  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  cu legătura  $xyz = 1$ . Se formează funcția auxiliară

$$\phi(x, y, z) = xy + yz + zx + \lambda(xyz - 1).$$

Punctele critice ale funcției se obțin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = y + z + \lambda yz = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x + z + \lambda xz = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = y + x + \lambda xy = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = xyz - 1 = 0 \end{cases} \quad (4.63)$$

Sistemul (4.63) are o singură soluție și anume  $x = y = z = 1$ ,  $\lambda = -2$ . Fie  $\phi_0(x, y, z) = xy + yz + zx - 2(xyz - 1)$ .

$$d^2\phi_0(x, y, z) = 2[(1 - 2z)dx dy + (1 - 2y)dx dz + (1 - 2x)dy dz]$$

$$d^2\phi_0(1, 1, 1) = -2(dx dy + dx dz + dy dz).$$

Diferențiind legătura, obținem  $dF(x, y, z) = 0$ , deci

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = yz dx + xz dy + xy dz = 0.$$

Pentru  $x = z = 1$  avem  $dx + dy + dz = 0$ , de unde rezultă  $dz = -(dx + dy)$ . Înlocuind în  $d^2\phi_0(1, 1, 1)$  obținem:

$$d^2\phi(1, 1, 1) = 2(dx^2 - dx dy + dy^2),$$

care este pozitiv definită, deoarece

$$\Delta_1 = a_{11} = 1 > 0 \quad \text{și} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0.$$

Așadar, punctul  $(1, 1, 1)$  este punct de minim pentru funcția  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  condiționat de legătura  $xyz = 1$ .

#### 4.13. Schimbări de variabile

Fie expresia

$$H\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots\right) \quad (4.64)$$

unde  $x$  și  $y$  sunt variabile independente și  $z = z(x, y)$ .

Fie  $A, B \subset \mathbb{R}^3$  două mulțimi deschise și  $F = (\varphi, \psi, \chi): A \rightarrow B$  un difeomorfism de clasă  $C^k$ . Fiecărui punct  $(x, y, z) \in A$  îi corespunde prin funcția vectorială  $F$  un punct  $(u, v, w) \in B$  și anume

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y, z) \\ v = \psi(x, y, z) \\ w = \chi(x, y, z) \end{cases} \quad (4.65)$$

Deoarece  $F$  este bijectivă, sistemul (4.65) se poate rezolva în raport cu  $x, y, z$ . De asemenea, vom presupune că din primele două ecuații din (4.65) se pot rezolva  $x$  și  $y$  în raport cu  $u, v$  și  $z$ .

Problema schimbării de variabile constă în întrebarea ce devine expresia (4.64) în urma schimbării de variabile (4.65)? Este evident că pentru a rezolva această problemă este suficient să exprimăm derivatele  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  etc., în funcție de

$$u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \text{ etc.}$$

Ținând seama că  $z = z(x, y)$  și  $w = w(u, v)$ :

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \quad (4.66)$$

$$dv = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \quad (4.67)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \quad (4.68)$$

Înlocuind în (4.68) expresiile diferențialelor  $du$  și  $dv$  date de (4.66) și (4.67) și egalând coeficienții în  $dx$  și  $dy$  obținem

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial w}{\partial u} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] + \frac{\partial w}{\partial v} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] \right] = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \left[ \frac{\partial w}{\partial u} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] + \frac{\partial w}{\partial v} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] \right] = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \end{cases} \quad (4.69)$$

Rezolvând sistemul (4.69) rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}} \end{array} \right. \quad (4.70)$$

Pentru calculul derivatelor de ordinul doi  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  se calculează diferențialele de ordinul doi  $d^2u, d^2v, d^2w$ .

**Exemplu.** Ce devine expresia  $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  în coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta$$

$$dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta) + \frac{\partial z}{\partial y} (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta) = \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta.$$

Egalând coeficienții termenilor  $d\theta$  și  $d\rho$  obținem:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta = \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ -\frac{\partial z}{\partial x} \rho \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \rho \cos \theta = \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem rezultă:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases}$$

Se obțin astfel operatorii de derivare:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

Mai departe avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) = \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\rho} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \right).\end{aligned}$$

După calcule ușor de urmărit obținem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} - \frac{2}{\rho} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \sin^2 \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

În mod analog avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \cos^2 \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

Astfel, în coordonate polare, expresia laplacianului este

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho}.$$

#### 4.14. Elemente de teoria câmpurilor

Fie  $A \subset \square^3$  o mulțime deschisă,  $a = (a_1, a_2, a_3) \in A$  un punct fixat și  $l = (l_1, l_2, l_3) \in \square^3$  un versor, deci  $\|l\| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} = 1$ . Deoarece  $a \in A$  este punct interior, rezultă că  $\exists r > 0$  astfel încât  $B(a, r) \subset A$ . Pentru  $\forall t \in (-r, r)$ , punctul  $x = a + tl \in B(a, r) \subset A$ .



**Definiția 4.14.1.** Spunem că funcția  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă în punctul  $a$ , după direcția  $l$ , dacă următoarea limită există și e finită.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tl) - f(a)}{|t|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x=a+tl}} \frac{f(x) - f(a)}{d(a, x)}.$$

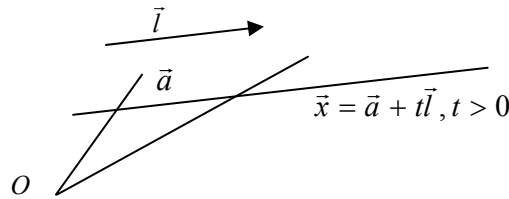
Această limită se notează cu  $\frac{df}{dl}(a)$  și se numește derivata funcției  $f$  în punctul  $a$ , după direcția  $l$ .

Din punct de vedere geometric, mulțimea punctelor  $x = a + tl$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , reprezintă dreapta care trece prin  $a$  și are parametrii directori  $l_1, l_2, l_3$ .

Semiaxa pozitivă a acestei drepte corespunde valorilor parametrilor  $t > 0$ , iar semiaxa negativă corespunde valorilor  $t < 0$ . Convenim să notăm cu  $l^+$  sensul pozitiv pe această dreaptă și cu  $l^-$  sensul negativ.

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial l^-}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tl) - f(a)}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tl) - f(a)}{-t} = -\frac{\partial f}{\partial l^+}(a).$$



**Teorema 4.14.1.** Dacă  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  este o diferențiabilă în punctul  $a \in A$ , atunci  $f$  este derivabilă în punctul  $a$  după direcția  $l$  și avem:

$$\frac{\partial f}{\partial l^+}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)l_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)l_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(a)l_3.$$

*Demonstrație*

Fie  $r > 0$  astfel încât  $B(a, r) \subset A$ . Dacă  $t \in (0, r)$ , atunci  $a + tl \in A$  și deoarece  $f$  este diferențiabilă în punctul  $a$  vom avea:

$$f(a + tl) - f(a) = f'(a)(tl) + \varphi(tl),$$

unde  $\varphi$  este  $o(tl)$  pentru  $h \rightarrow 0$ . Ținând seama că  $\|tl\| = t$  și  $f'(a)(tl) = tf'(a)(l)$ , în continuare avem:

$$\frac{f(a + tl) - f(a)}{t} = f'(a)(l) + \frac{\varphi(tl)}{\|tl\|}.$$

Cum  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(tl)}{\|tl\|} = 0$ , rezultă:

$$\begin{aligned} \exists \frac{\partial f}{\partial l^+}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tl) - f(a)}{t} = f'(a)(l) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)l_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)l_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(a)l_3. \end{aligned}$$

**Exemplu.** Fie  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $a = (1, -1, 1)$  și  $l = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, 0\right)$ . Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 1 \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a) = -1, \text{ deci}$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = -\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} - 1 \cdot 0 = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

**Definiția 4.14.2.** Fie  $D \subset \square^3$  o mulțime deschisă. Prin câmp scalar pe  $D$  se înțelege orice funcție  $u: D \rightarrow \square$ . Dacă în plus  $u \in C^k(D)$ , spunem că  $u$  este un câmp scalar de clasă  $C^k$  pe  $D$ . Prin câmp vectorial pe  $D$  se înțelege orice funcție vectorială,  $\vec{v} = (P, Q, R): D \rightarrow \square^3$ . Dacă  $P, Q, R \in C^k(D)$ , spunem că  $\vec{v}$  este un câmp vectorial de clasă  $C^k$  pe  $D$ .

Ca exemple de câmpuri scalare menționăm câmpul temperaturilor, câmpul presiunilor, câmpul densităților etc. Un exemplu tipic de câmp vectorial este câmpul vitezelor particulelor unui fluid în mișcare.

În continuare, presupunem că fixăm un reper rectangular drept  $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , unde  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sunt versori și identificăm orice punct  $M$  din spațiu cu vectorul său de poziție  $\overrightarrow{OM}$ . Cu această precizare, dacă  $\vec{v} = (P, Q, R): D \rightarrow \square^3$  este un câmp vectorial, atunci

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}, \quad \forall (x, y, z) \in D.$$

**Definiția 4.14.3.** Dacă  $u: D \subset \square^3 \rightarrow \square$  este un câmp scalar de clasă  $C^1$  pe  $D$ , atunci câmpul vectorial pe  $D$  definit prin  $\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ , se numește câmpul de gradienti al câmpului scalar  $u$ .

Reamintim că produsul scalar a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este prin definiție  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \phi$ , unde  $\phi$  este unghiul dintre cei doi vectori, iar expresia

analitică a produsului scalar este  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ , unde  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ . Din Teorema 4.14.1 rezultă:

**Observația 4.14.1.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^3$  deschisă,  $a \in D$  și  $\vec{l} = l_1 \vec{i} + l_2 \vec{j} + l_3 \vec{k}$  un versor. Dacă  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  este diferențiabilă în  $a$ , atunci

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \vec{l} \cdot \text{grad}_a(f), \text{ unde } \text{grad}_a(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(a) \vec{k}.$$

Fie  $\varphi$  unghiul dintre  $\vec{l}$  și  $\text{grad}_a(f)$ . Atunci  $\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \|\text{grad}_a(f)\| \cos \varphi$ , de unde rezultă că valoarea maximă a derivatei lui  $f$  în  $a$ , după direcția  $l$ , se realizează atunci când  $\vec{l}$  și  $\text{grad}_a(f)$  sunt colineare.

**Definiția 4.14.4.** Un câmp vectorial  $\vec{v}$  pe  $D$  se numește de potențial dacă există  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C^1(D)$  astfel încât  $\vec{v} = \text{grad}(u)$ . Dacă  $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ , aceasta revine la

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

**Exemplu:**  $\vec{v}(x, y, z) = y^2 z^3 \vec{i} + 2xyz^3 \vec{j} + 3xy^2 z^2 \vec{k}$  este câmp de potențial, deoarece  $\vec{v} = \text{grad } u$ , unde  $u(x, y, z) = xy^2 z^3$ .

**Definiția 4.14.5.** Fie  $\vec{v} = (P, Q, R) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  un câmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$ . Se numește divergența câmpului  $\vec{v}$ , următorul câmp scalar

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Câmpul vectorial  $\vec{v}$  se numește solenoidal (tubular) dacă  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ .

**Definiția 4.14.6.** Fie  $\vec{v} = (P, Q, R) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  un câmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$ . Se numește rotorul câmpului  $\vec{v}$ , următorul câmp vectorial:

$$\text{rot}(\vec{v}) = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Câmpul vectorial  $\vec{v}$  se numește iracional dacă  $\text{rot } \vec{v} \neq 0$ .

Pentru a reține mai ușor expresia rotorului se folosește următorul determinant simbolic

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

(acest determinant „se dezvoltă” întotdeauna după prima linie).

**Definiția 4.14.7.** Se numește operatorul nabla, sau operatorul lui Hamilton, următorul operator simbolic

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Fie  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  un câmp scalar de clasă  $C^1$  pe  $D$  și  $\vec{v} = (P, Q, R) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  un câmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$ . Cu ajutorul operatorului  $\nabla$ , operatorii diferențiali se exprimă astfel:

1)  $\operatorname{grad}(u) = \nabla u$  – produsul dintre vectorul  $\nabla$  și funcția scalară  $u$

$$\operatorname{grad}(u) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k};$$

2)  $\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$  – produsul scalar dintre vectorii  $\nabla$  și  $\vec{v}$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (Pi + Qj + Rk) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

3)  $\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v}$  – produsul vectorial dintre vectorii  $\nabla$  și  $\vec{v}$

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

**Teorema 4.14.2.** Fie  $u_1, u_2$  două câmpuri scalare de clasă  $C^1$  pe  $D$  și  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  două câmpuri vectoriale de clasă  $C^1$  pe  $D$ . Au loc următoarele proprietăți:

a)  $\operatorname{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_2 \operatorname{grad} u_1 + u_1 \operatorname{grad} u_2$

b)  $\operatorname{div}(u_1 \cdot \vec{v}_1) = \vec{v}_1 \operatorname{grad} u_1 + u_1 \operatorname{div} \vec{v}_1$

c)  $\operatorname{div}(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \vec{v}_2 \operatorname{rot} \vec{v}_1 - \vec{v}_1 \operatorname{rot} \vec{v}_2$

d)  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \Delta u_1$

(operatorul  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  se numește laplacian)

$$e) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}_1) = 0$$

$$f) \operatorname{rot}(u_1 \cdot \vec{v}_1) = \operatorname{grad} u_1 \times \vec{v}_1 + u_1 \operatorname{rot} \vec{v}_1$$

$$g) \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u_1) = 0.$$

*Demonstrație*

Demonstrația revine la verificări directe. De exemplu:

$$\begin{aligned} b) \operatorname{div}(u_1 \cdot \vec{v}_1) &= \operatorname{div}(u_1 P_1 \vec{i} + u_1 Q_1 \vec{j} + u_1 R_1 \vec{k}) = \frac{\partial}{\partial x}(u_1 P_1) + \frac{\partial}{\partial y}(u_1 Q_1) + \frac{\partial}{\partial z}(u_1 R_1) = \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x} P_1 + u_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} Q_1 + u_1 \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial z} R_1 + u_1 \frac{\partial R_1}{\partial z} = (\operatorname{grad} u_1) \cdot \vec{v}_1 + u_1 \operatorname{div} \vec{v}_1. \end{aligned}$$

## Bibliografie

- [1] G. Chilov, *Analyse Mathématique*, Editions Mir, Moscou, Vol. 1 (1973), Vol. 2 (1975).
- [2] I. Colojoară, *Analiză matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [3] R. Cristescu, *Elemente de analiză funcțională*, Ed. Tehnică, București, 1975.
- [4] P. Flondor, O. Stănășilă, *Lecții de analiză matematică și exerciții rezolvate*, Ed. ALL, 1998.
- [5] V.A. Ilyn and E.G. Poznyak, *Fundamentals of Mathematical Analysis*, Mir Publishers Moscow, Part I and II, 1982.
- [6] S. Lange, *Analysis I*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [7] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de analiză matematică*, Vol I și II, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1962.
- [8] S.M. Nicolsky, *A Course of Mathematical Analysis*, Mir Publishers Moscow, Part I and Part II, 1977.
- [9] V. Olariu, A. Halanay, S. Turbatu, *Analiză Matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [10] G. Păltineanu, I. Popa, R. Trandafir, *Analiză matematică*, Partea I – Calculul diferențial. Litografie U.T.C.B., 1990.
- [11] I. Popa, *Analiză matematică*, Vol. 1, Calculul diferențial, MATRIX ROM, București, 2000.
- [12] O. Stănășilă, *Analiză matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.

# CAPITOLUL 1

## PRIMITIVE

### 1.1 METODE GENERALE DE CALCUL ALE PRIMITIVELOR

În acest paragraf vom reaminti noțiunea de primitivă, proprietățile primitivelor și metodele generale de calcul ale acestora.

**Definiția 1.1.1** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval. Funcția  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  se numește primitivă a funcției  $f$  pe intervalul  $I$ , dacă  $F$  este derivabilă pe  $I$  și

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

**Observația 1.1.1** Dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$  pe  $I$ , atunci oricare ar fi constanta reală  $C$ , funcția  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $G(x) = F(x) + C$ ,  $\forall x \in I$ , este de asemenea o primitivă a lui  $f$  pe  $I$ . Mai mult, orice altă primitivă a lui  $f$  pe  $I$  este de această formă.

Într-adevăr, dacă  $G = F + C$ , atunci  $G' = F' = f$ , deci  $G$  este o primitivă a lui  $f$  pe  $I$ .

Reciproc, fie  $G$  o altă primitivă a lui  $f$  pe  $I$  și fie  $H = G - F$ .

Pentru orice  $x \in I$  avem  $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ .

Fie acum  $a \in I$  un punct interior fixat. Din Teorema lui Lagrange rezultă că pentru orice  $x \in I$ , există  $\xi$  în intervalul deschis de capete  $a$  și  $x$  astfel încât:

$$H(x) - H(a) = H'(\xi)(x - a) = 0.$$

Dacă notăm cu  $C = H(a)$ , atunci  $G(x) - F(x) = C$ ,  $\forall x \in I$ , deci  $G = F + C$  pe  $I$ .

**Definiția 1.1.2** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  și  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a sa. Mulțimea tuturor primitivelor funcției  $f$  pe  $I$  se notează cu  $\int f dx$  sau  $\int f(x) dx$  și se numește integrala nedefinită a funcției  $f$ .

Din Observația 1.1.1 rezultă că

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \forall x \in I,$$

unde cu  $C$  am notat mulțimea tuturor funcțiilor constante pe  $I$ .

**Observația 1.1.2** În capitolul următor se va arăta că orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acest interval.

În continuare reamintim tabloul primitivelor funcțiilor elementare uzuale.

$$\begin{aligned}
\int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln x + C, \quad x \in (0, \infty), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C, \quad x \in (-\infty, 0) \\
\int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0, a \neq 1, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R} \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R} \\
\int \cos x dx &= \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R} \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2; k \in \mathbb{Z}\} \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R} \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, \quad x \in (-1, 1) \\
\int \operatorname{sh} x dx &= \operatorname{ch} x + C, \quad x \in \mathbb{R} \\
\int \operatorname{ch} x dx &= \operatorname{sh} x + C, \quad x \in \mathbb{R} \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C, \quad x \in \mathbb{R} \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \begin{cases} \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C, & x \in (a, \infty) \\ \ln\left(-x - \sqrt{x^2-a^2}\right) + C, & x \in (-\infty, -a) \end{cases}, \quad a > 0.
\end{aligned}$$

**Propoziția 1.1.1** Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  oarecare. Dacă  $f$  și  $g$  au primitive pe  $I$ , atunci  $\alpha f + \beta g$  admite primitive pe  $I$  și

$$\int (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

*Demonstrație.*

Afirmația rezultă din proprietatea de linearitate a operației de derivare:

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G'.$$

**Propoziția 1.1.2** Fie  $F : J \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a funcției  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $u : I \rightarrow J$  o funcție derivabilă pe  $I$ . Atunci



$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C, \quad \forall x \in I.$$

Demonstrația rezultă imediat din regula de derivare a funcțiilor compuse:

$$(F[u(x)])' = F'[u(x)] \cdot u'(x) = f[u(x)] \cdot u'(x), \quad x \in I.$$

**Observația 1.1.3** Din Propoziția 1.1.2 rezultă că pentru calculul primitivei funcției  $(f \circ u)u'$  se poate proceda astfel:

Facem schimbarea de variabilă  $t = u(x)$ ,  $x \in I$ . Funcția  $u$  este diferențiabilă pe  $I$  și avem  $dt = du(x) = u'(x)dx$ .

În continuare rezultă:

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F[u(x)] + C, \quad x \in I.$$

Precizăm că egalitatea  $\int f[u(x)]u'(x)dx = \int f(t)dt$  este o egalitate formală.

Într-adevăr, funcția din membrul stâng este definită pe  $J$  iar funcția din membrul drept pe  $I$ , deci cele două funcții nu sunt egale în sensul egalității funcțiilor.

**Exemplul 1.1.1** Să se calculeze  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ .

Dacă notăm  $t = \frac{x}{a}$ , atunci  $dx = a dt$  și vom avea:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{adt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} \arctg t = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

În mod analog se arată că

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad x \in (-a, a), \quad a > 0.$$

**Propoziția 1.1.3** Fie  $u : I \rightarrow J$  o funcție bijectivă de clasă  $C^1$  cu  $u'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I$  și  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Dacă  $G : J \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a funcției  $f \cdot (u^{-1})' : J \rightarrow \mathbb{R}$  atunci  $\int f[u(x)]dx = G[u(x)] + C, \quad \forall x \in I$ .

*Demonstrație.*

Deoarece  $u^{-1}[u(x)] = x, \quad \forall x \in I$ , rezultă  $(u^{-1})'[u(x)]u'(x) = 1, \quad \forall x \in I$ .

Așadar avem:

$$\int f[u(x)]dx = \int f[u(x)] \cdot (u^{-1})'[u(x)] \cdot u'(x)dx = \int \left[ f \cdot (u^{-1})' \right][u(x)] \cdot u'(x)dx.$$

Cum  $G$  este o primitivă a funcției  $f \cdot (u^{-1})'$ , din Propoziția 1.1.2 rezultă că

$$\int \left[ f \cdot (u^{-1})' \right] [u(x)] \cdot u'(x) dx = G[u(x)] + C.$$

**Observația 1.1.4** Din Propoziția 1.1.3 rezultă că pentru calculul primitivei  $\int f[u(x)] dx$ , facem schimbarea de variabilă  $t = u(x)$  și acceptăm următorul calcul formal:  $x = u^{-1}(t)$ ,  $dx = (u^{-1})'(t) dt$ ,  $\int f[u(x)] dx = \int f(t) \cdot (u^{-1})'(t) dt = G(t) + C = G[u(x)] + C$ .

**Exemplul 1.1.2** Să se calculeze  $\int \operatorname{tg}^4 x dx$ ,  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

Notăm  $t = \operatorname{tg} x$ ,  $x = \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ .

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^4 x dx &= \int \frac{t^4}{1+t^2} dt = \int \left( t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

Următorul rezultat este cunoscut sub numele de metoda de integrare prin părți.

**Propoziția 1.1.3** Dacă  $f$  și  $g$  sunt de clasă  $C^1$  pe  $I$ , atunci

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

*Demonstrație.*

Conform regulii de derivare a produsului a două funcții, avem:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Ținând seama de Propoziția 1.1.1 rezultă

$$\int f(x)g'(x) dx = \int (f(x)g(x))' dx - \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

**Exemplul 1.1.3** Să se calculeze  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

Dacă notăm cu  $f(x) = x$  și  $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ , atunci

$$f'(x)=1, \quad g(x)=-\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{și} \quad \int x \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Așadar } \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2} dx, \text{ de rezultă că} \\ 2 \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C, \text{ deci} \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

În mod asemănător se arată că

$$\int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left( x + \sqrt{x^2+a^2} \right) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

## 1.2. PRIMITIVELE FUNCȚIILOR RAȚIONALE

Prin funcție rațională se înțelege un raport de două polinoame (funcții polinomiale), adică o funcție de forma:  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $x \in I$  unde  $P$  și  $Q$  sunt polinoame și  $Q(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I$ . Dacă gradul lui  $P$  este mai mare sau egal cu gradul lui  $Q$ , efectuăm împărțirea și obținem:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \text{ unde } C \text{ este un polinom și } \text{grad } P_1 < \text{grad } Q.$$

De la cursul de algebră se știe că raportul  $\frac{P_1}{Q}$  admite următoarea descompunere (unică) în fracții simple:

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} &= \sum_{j=1}^l \left( \frac{A_{j1}}{x-a_j} + \frac{A_{j2}}{(x-a_j)^2} + \dots + \frac{A_{jk_j}}{(x-a_j)^{k_j}} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left[ \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + b_jx + c_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + b_jx + c_j)^2} + \dots + \frac{B_{jm_j}x + C_{jm_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{m_j}} \right]. \end{aligned}$$

unde  $A_{ji}, a_j, B_{ji}, C_{ji}, b_j, c_j$  sunt numere reale,  $b_j^2 - 4c_j < 0$ ,  $j = \overline{1, n}$  și  $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_l)^{k_l} (x^2 + b_1x + c_1)^{m_1} \dots (x^2 + b_nx + c_n)^{m_n}$  (Descompunerea în factori ireductibili a polinomului  $Q$ ).

Așadar, pentru a calcula primitiva unei funcții raționale este suficient să știm să calculăm primitive de forma

$$\int \frac{1}{(x-a)^k} dx, \text{ respectiv } \int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} dx, \quad b^2-4c < 0, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Calculul primului tip de primitivă este imediat. Într-adevăr, pentru  $k \neq 1$  avem  $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k} dx = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$ , iar  $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$ .

Pentru al doilea tip de primitivă procedăm astfel:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} dx = \int \frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4}\right]^k} dx.$$

Folosind notațiile  $t = x + \frac{b}{2}$  și  $a^2 = \frac{4c-b^2}{4}$  obținem:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2t}{(t^2+a^2)^k} dt + \left(C - \frac{Bb}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Evident avem:

$$\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^k} dt = \begin{cases} \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}, & \text{pentru } k \neq 1 \\ \ln(t^2+a^2), & \text{pentru } k = 1. \end{cases}$$

Pentru cealaltă primitivă stabilim, în cazul  $k > 1$ , o relație de recurență:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^k} dt = \frac{1}{a^2} \left( I_{k-1} - \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k} dt \right).$$

Dacă notăm cu  $f(t) = t$  și  $g'(t) = \frac{t}{(t^2+a^2)^k}$ , atunci  $f'(t) = 1$  și

$$g(t) = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{(t^2+a^2)^k} dt = -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} \text{ și}$$

$$\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k} dt = -\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} I_{k-1}.$$

În continuare avem:

$$I_k = \frac{1}{a^2} \left( I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)} I_{k-1} \right) \text{ sau}$$

$$I_k = \frac{1}{a^2} \left( \frac{t}{2(k-1)(t^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} I_{k-1} \right) \quad (1)$$

În cazul  $k = 1$  avem  $I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$ .

**Exemplul 1.2.1** Să se calculeze primitiva funcției:

$$f(x) = \frac{x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x}{x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1}.$$

Este ușor de observat că polinomul de la numitor are rădăcina dublă  $x = 1$  și admite descompunerea  $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2(x^2+1)^2$ .

Din teorema împărțirii rezultă:

$$f(x) = x + \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}, \text{ deci}$$

$$\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx.$$

Funcția de sub semnul integrală o descompunem în fracții simple astfel:

$$\frac{x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Dacă amplificăm ambii membri ai acestei egalități cu  $(x-1)^2$  și apoi dăm lui  $x$  valoarea 1, rezultă  $B = -1$ . În continuare, trecem în membrul stâng termenul  $\frac{-1}{(x-1)^2}$ , aducem la același numitor și simplificăm cu  $x-1$ . Rezultă:

$$\frac{x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Amplificând ultima egalitate cu  $x-1$  și dând apoi lui  $x$  valoarea 1 obținem  $A = 1$ . Trecem în membrul stâng termenul  $\frac{1}{x-1}$ , aducem la același numitor și simplificăm cu  $x-1$ . Rezultă:

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x^2+1)^2} = \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} \text{ sau}$$

$$x^2 + x + 2 = Cx^3 + Dx^2 + (C+E)x + D + F.$$

Se obține astfel sistemul:  $C = 0$ ,  $D = 1$ ,  $C + E = 1$ ,  $D + F = 2$ , care admite soluția:  $C = 0$ ,  $D = 1$ ,  $E = 1$ ,  $F = 1$ .

Așadar, avem:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{1}{x^2+1} dx + \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \arctg x + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \arctg x - \frac{1}{2(x^2+1)} + I_2. \end{aligned}$$

Din (1) rezultă:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg x.$$

În final avem:

$$\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2} \arctg x + C.$$

### 1.3 PRIMITIVE DE FORMA: $\int R(\cos x, \sin x) dx$

Fie  $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$  o funcție rațională de două variabile, unde  $P(u, v) =$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} u^i v^j \text{ și } Q(u, v) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^l b_{kj} u^k v^j \text{ sunt două polinoame de două variabile.}$$

Presupunem că  $I \subset (-\pi, \pi)$  este un interval și  $Q(\sin x, \cos x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I$ .

Pentru calculul primitivei de forma  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  facem schimbarea de

variabilă:  $t = \tg \frac{x}{2}$ ,  $x \in I$ . Inversând funcția, obținem  $x = 2 \arctg t$  și  $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ .

Pe de altă parte avem:

$$\cos x = \frac{1 - \tg^2 \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}} \text{ și } \sin x = \frac{2 \tg \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}}.$$

În urma acestei schimbări de variabilă rezultă:

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

unde  $R_1$  este o funcție rațională în  $t$ .

**Observația 1.3.1** Intervalul  $I$  se poate înlocui cu orice alt interval  $J$  pe care funcția  $x \rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  este strict monotonă și  $Q(\sin x, \cos x) \neq 0, \forall x \in J$ .

**Exemplul 1.3.1** Să se calculeze  $\int \frac{dx}{3 + \sin x}, x \in (-\pi, \pi)$ .

Facem schimbarea de variabilă  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  și obținem:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \sin x} &= \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2dt}{3t^2 + 2t + 3} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

În continuare, prezentăm trei cazuri particulare, în care se pot face alte schimbări de variabile, ce conduc la calculul unor primitive de funcții raționale mai simple decât cele obținute în urma schimbării de variabilă  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ .

1.  $R(\cos x, \sin x) = R_1(\cos^2 x, \sin^2 x)$  sau  $R_2(\operatorname{tg} x)$ , unde  $R_1$  (respectiv  $R_2$ ) sunt funcții raționale.

Presupunem în plus că  $I \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $Q(\cos x, \sin x) \neq 0, \forall x \in I$ . În acest caz, se face schimbarea de variabilă  $t = \operatorname{tg} x$ .

Inversând funcția, obținem  $x = \operatorname{arctg} t$  și  $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ .

De la trigonometrie se știe că:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{și} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Așadar, în urma acestei schimbări de variabile obținem:

$$\int R_1(\cos^2 x, \sin^2 x) dx = \int R_1\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{1}{1+t^2} dt,$$

respectiv

$$\int R_2(\operatorname{tg} x) dx = \int R_2(t) \cdot \frac{1}{1+t^2} dt.$$

În ambele cazuri problema s-a redus la calculul unor primitive de funcții raționale în  $t$ .

**Exemplul 1.3.2** Să se calculeze  $\int \frac{1}{2 + \sin x \cos x} dx$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Pentru început observăm că:

$$\int \frac{1}{2 + \sin x \cos x} dx = \int \frac{1}{2 + \operatorname{tg} x \cos^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 2} dx.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă:  $x = \operatorname{tg} x$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 + \sin x \cos x} dx &= \int \frac{t^2 + 1}{2t^2 + t + 2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2t^2 + t + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{4 \operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{15}} + C. \end{aligned}$$

2)  $R(\cos x, \sin x) = R_1(\cos^2 x, \sin x) \cos x$ ,  $x \in I$ , unde  $R_1$  este de asemenea, o funcție rațională de două variabile.

În acest caz facem schimbarea de variabilă  $\sin x = t$ . Rezultă  $dt = \cos x dx$  și

$$\int R_1(\cos^2 x, \sin x) \cos x dx = \int R_1(1-t^2, t) dt = \int R_2(t) dt.$$

**Exemplul 1.3.3** Să se calculeze  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ ,  $x \neq k\pi$ . Dacă facem schimbarea de variabilă:  $t = \sin x$ , atunci  $dt = \cos x dx$  și obținem:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1-t^2) dt}{t^4} = \int \left( \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \\ &= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

3)  $R(\cos x, \sin x) = R_1(\cos x, \sin^2 x) \sin x$ .



În acest caz se recomandă schimbarea de variabilă  $\cos x = t$ .

**Exemplul 1.3.4** Să se calculeze  $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx$ . Dacă facem schimbarea de variabilă  $\cos x = t$  obținem:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int t^2 (1-t^2)(-dt) = \int (t^4 - t^2) dt = \\ &= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

## 1.4 PRIMITIVE DE FORMA $\int R(\sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx$

Pentru început observăm că printr-o schimbare de variabilă de forma  $t = \alpha x + \beta$  se obține o primitivă de forma:  $\int R_1(t, \sqrt{t^2 + 1}) \, dt$ ,  $\int R_1(t, \sqrt{t^2 - 1}) \, dt$  sau  $\int R_1(t, \sqrt{1 - t^2}) \, dt$ .

Într-adevăr, dacă  $a > 0$  și  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , atunci avem:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}} \sqrt{\frac{4a^2}{-\Delta} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + 1}.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$t = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}} \left(x + \frac{b}{2a}\right), \text{ atunci } x = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \left(t - \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\right), \, dx = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} dt$$

$$\begin{aligned} \text{și } \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx &= \int R\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \left(t - \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\right), \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}} \cdot \sqrt{t^2 + 1}\right] \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} dt = \\ &= \int R_1\left(t, \sqrt{t^2 + 1}\right) dt. \end{aligned}$$

Celelalte două forme se obțin în cazurile  $a > 0$ ,  $\Delta > 0$ , respectiv  $a < 0$ ,  $\Delta > 0$ .

Pentru primitivele de forma  $\int R(t, \sqrt{t^2 + 1}) \, dt$  se poate face una din următoarele schimbări de variabile:

$$\sqrt{t^2 + 1} = tu + 1; \quad \sqrt{t^2 + 1} = tu - 1; \quad \sqrt{t^2 + 1} = u \pm t.$$

**Exemplul 1.4.1** Să se calculeze  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ .

Dacă facem schimbarea de variabilă  $x + 1 = t$ , rezultă

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \int \frac{dx}{x + \sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \int \frac{dt}{t-1 + \sqrt{t^2 + 1}}.$$

Facem acum o nouă schimbare de variabilă:  $\sqrt{t^2 + 1} = u - t$ . Ridicând la pătrat și efectuând calculele obținem:

$$t = \frac{u^2 - 1}{2u}, \quad dt = \frac{u^2 + 1}{2u^2} du \quad \text{și} \quad \sqrt{t^2 + 1} = \frac{u^2 + 1}{2u}.$$

Așadar, avem:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t-1 + \sqrt{t^2 + 1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{u^2 - 1}{2u} - 1 + \frac{u^2 + 1}{2u}} \cdot \frac{u^2 + 1}{u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{(u^2 + 1) du}{u^2(u-1)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u-1} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2(u-1)} = \frac{1}{2} \ln|u-1| + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = \\ &= \ln|u-1| - \frac{1}{2} \ln|u| + \frac{1}{2u} + C \quad \text{unde} \quad u = t + \sqrt{t^2 + 1} = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}. \end{aligned}$$

Pentru primitive de forma  $\int R(t, \sqrt{t^2 - 1}) dt$  se poate face una din următoarele schimbări de variabile:  $\sqrt{t^2 - 1} = u(t-1)$ ;  $\sqrt{t^2 - 1} = u(t+1)$ ;  $\sqrt{t^2 - 1} = t - u$ , iar pentru primitive de forma  $\int R(t, \sqrt{1-t^2}) dt$ ,  $\sqrt{1-t^2} = u(1-t)$ ;  $\sqrt{1-t^2} = u(1+t)$ ;  $\sqrt{1-t^2} = tu \pm 1$ .

## 1.5. PRIMITIVE DE FORMA: $\int x^m (ax^n + b)^p dx$ , $m, n, q \in \mathbb{Q}$

Acest tip de primitive este cunoscut sub numele de integrale binome. Matematicianul rus P.L. Cebâșev a arătat că aceste primitive se pot calcula numai în următoarele 3 cazuri:

**Cazul 1:**  $p \in \mathbb{Z}$ .

Dacă notăm cu  $r$  numitorul comun al numerelor  $m$  și  $n$  și facem schimbarea de variabilă  $x = t^r$  obținem:

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx = \int t^{mr} (at^{nr} + b)^p \cdot r t^{r-1} dt.$$

Deoarece  $mr \in \mathbb{Z}$  și  $nr \in \mathbb{Z}$  rezultă că funcția de sub semnul integrală este rațională.

**Exemplul 1.5.1** Să se calculeze  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}, x \in (0, \infty)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = \int x^{-1/2} (x^{1/4} + 1)^{-10} dx.$$

Așadar avem:  $m = -\frac{1}{2}$ ;  $n = \frac{1}{4}$  și  $p = -10 \in \mathbb{Z}$ .

Cum  $r = 4$  facem schimbarea de variabilă  $x = t^4$  și obținem:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} &= \int \frac{4t^3 dt}{t^2(t+1)^{10}} = 4 \int \frac{t}{(t+1)^{10}} dt = 4 \int \frac{dt}{(t+1)^9} - 4 \int \frac{dt}{(t+1)^{10}} = \\ &= -\frac{1}{2(t+1)^8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{(t+1)^9} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt[4]{x}+1)^8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{(\sqrt[4]{x}+1)^9} + C. \end{aligned}$$

**Cazul 2:**  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ ,  $p \notin \mathbb{Z}$ .

Dacă notăm  $u = x^n$ ,  $x > 0$ , atunci  $x = u^{\frac{1}{n}}$ ,  $dx = \frac{1}{n} \cdot u^{\frac{1}{n}-1} du$  și

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx = \frac{1}{n} \int u^{\frac{m}{n}} (au + b)^p u^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{1}{n} \int u^{\frac{m+1}{n}-1} (au + b)^p du.$$

În continuare facem schimbarea de variabilă  $au + b = t^r$ , unde  $r$  este numitorul lui  $p$ . Rezultă  $u = \frac{1}{a}(t^r - b)$  și

$$\int u^{\frac{m+1}{n}-1} (au + b)^p du = \int \left[ \frac{1}{a}(t^r - b) \right]^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot t^{rp} \cdot \frac{r}{a} \cdot t^{r-1} dt = \int R(t) dt.$$

Cum  $\frac{m+1}{n} - 1 \in \mathbb{Z}$  și  $rp \in \mathbb{Z}$ , rezultă că funcția de sub semnul integralei este rațională în  $t$ .

**Exemplul 1.5.2** Să se calculeze  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

Avem  $m = 3$ ,  $n = 2$ , deci  $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$ . Cum  $p = -\frac{1}{2}$ , vom face schimbarea

de variabilă  $1 - x^2 = t^2$ . Rezultă  $x = \sqrt{1-t^2}$ ,  $dx = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} dt$  și

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{(1-t^2)^{3/2}}{t} \cdot \frac{-t}{(1-t^2)^{1/2}} dt = \int (t^2-1) dt = \frac{t^3}{3} - t = \\ &= \frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3} - \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

**Cazul 3:**  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Q}$ ;  $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Q}$ ;  $p \notin \mathbb{Q}$ .

Se poate arăta, așa cum s-a procedat și în cazul 2, că dacă facem schimbarea de variabilă  $\frac{ax^n+b}{x^n} = t^r$ ,  $x \neq 0$ , unde  $r$  este numitorul lui  $p$ , problema se reduce la calculul primitivei unei funcții raționale.

**Exemplul 1.5.3** Să se calculeze  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}$ ,  $x > 0$ .

Avem  $m = -2$ ;  $n = 2$  și  $p = 3/2$ . Evident  $\frac{m+1}{n} + p = -2 \in \mathbb{Q}$ . Facem schimbarea de variabilă  $1+x^2 = t^2 x^2$ ,  $x > 0$  și obținem  $x = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ ,

$$\begin{aligned}dx &= \frac{-t}{(t^2-1)^{3/2}} dt, \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}} = \int (t^2-1) \frac{(t^2-1)^{3/2}}{t^3} \cdot \frac{-t}{(t^2-1)^{3/2}} dt = \\ &= \int \frac{1-t^2}{t^2} dt = -\frac{1}{t} - t = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.\end{aligned}$$

În încheierea acestui capitol, prezentăm o listă de primitive care nu se pot exprima prin funcții elementare.

$$\begin{aligned}E_i(x) &= \int \frac{e^x}{x} dx; \quad S_i(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx; \quad C_i(x) = \int \frac{\cos x}{x} dx; \quad \text{Sh}_i(x) = \int \frac{\text{sh} x}{x} dx; \\ \text{Ch}_i(x) &= \int \frac{\text{ch} x}{x} dx; \quad S(x) = \int \sin x^2 dx; \quad C(x) = \int \cos x^2 dx; \quad \phi(x) = \int e^{-x^2} dx; \\ L_i(x) &= \int \frac{dx}{\ln x}.\end{aligned}$$

## CAPITOLUL 2

### INTEGRALA RIEMANN

#### 2.1 SUME DARBOUX. CRITERIUL DE INTEGRABILITATE DARBOUX

**Definiția 2.1.1** Se numește diviziune a intervalului  $[a, b]$  orice submulțime  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\} \subset [a, b]$  astfel încât

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Numărul  $\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$  se numește norma diviziunii  $\Delta$ . Spunem că diviziunea  $\Delta'$  este mai fină decât diviziunea  $\Delta$  și notăm  $\Delta < \Delta'$  dacă  $\Delta'$  conține pe lângă punctele diviziunii  $\Delta$  și alte puncte.

În continuare, pentru orice funcție  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , mărginită, notăm cu:

$$m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}, \quad M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\},$$

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

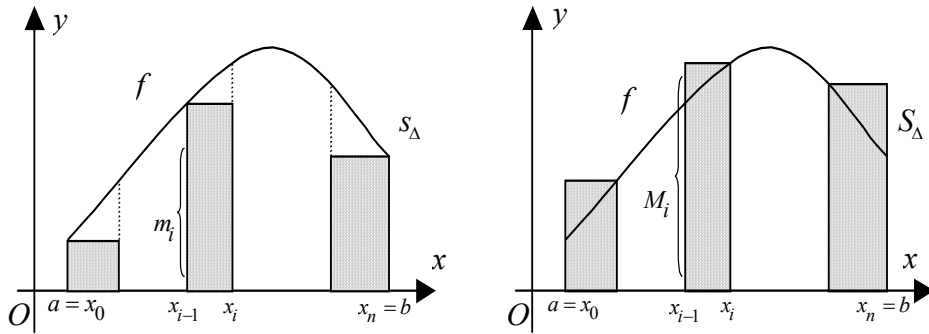
Evident au loc inegalitățile:

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M, \quad \forall \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

Suma Darboux inferioară (superioară) se definește astfel:

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}), \text{ respectiv } S_\Delta = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Din punct de vedere geometric, aceste sume reprezintă ariile evidențiate în figură.



Din (1) rezultă că pentru orice diviziune  $\Delta$  avem:

$$m(b-a) \leq s_{\Delta} \leq S_{\Delta} \leq M(b-a) \quad (2)$$

**Lema 21.1** Dacă  $\Delta \prec \Delta'$ , atunci  $s_{\Delta} \leq s_{\Delta'} \leq S_{\Delta'} \leq S_{\Delta}$ .

*Demonstrație.*

Fie  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ . Presupunem că diviziunea  $\Delta'$  conține pe lângă punctele diviziunii  $\Delta$ , un singur punct în plus și anume, punctul  $c$ , situat între  $x_{i-1}$  și  $x_i$ .

Fie  $m'_i = \inf \{f(x); x \in [x_{i-1}, c]\}$  și  $m''_i = \inf \{f(x); x \in [c, x_i]\}$ .

Deoarece  $m_i \leq m'_i$  și  $m_i \leq m''_i$ , rezultă

$$\begin{aligned} s_{\Delta'} - s_{\Delta} &= m'_i(c - x_{i-1}) + m''_i(x_i - c) - m_i(x_i - x_{i-1}) \geq \\ &\geq m_i(c - x_{i-1} + x_i - c) - m_i(x_i - x_{i-1}) = 0. \end{aligned}$$

Așadar, am arătat că  $s_{\Delta} \leq s_{\Delta'}$ . Evident, dacă presupunem că diviziunea  $\Delta'$  conține pe lângă punctele diviziunii  $\Delta$  mai multe puncte (distincte)  $c_1, \dots, c_p$ , raționamentul este asemănător.

Demonstrația inegalității  $S_{\Delta'} \leq S_{\Delta}$  este analoagă și rămâne în seama cititorului.

**Lema 2.1.2** Pentru orice două diviziuni  $\Delta'$  și  $\Delta''$  ale intervalului  $[a, b]$ , avem  $s_{\Delta'} \leq s_{\Delta''}$ .

*Demonstrație.*

Fie  $\bar{\Delta} = \Delta' \cup \Delta''$  diviziunea care constă din reuniunea punctelor diviziunilor  $\Delta'$  și  $\Delta''$ . Evident avem  $\Delta' \prec \bar{\Delta}$  și  $\Delta'' \prec \bar{\Delta}$ . Din Lema 2.1.1 rezultă:  $s_{\Delta'} \leq s_{\bar{\Delta}} \leq S_{\bar{\Delta}} \leq S_{\Delta''}$ .

Din inegalitățile (2) rezultă că mulțimea de numere reale  $\{s_{\Delta}\}_{\Delta}$  este majorată de numărul  $M(b-a)$ , iar mulțimea de numere reale  $\{S_{\Delta}\}_{\Delta}$  este minorată de numărul  $m(b-a)$ .

Notăm cu  $I_* = \sup_{\Delta} s_{\Delta}$  și cu  $I^* = \inf_{\Delta} S_{\Delta}$ .  $I^*$  se numește integrala superioară iar  $I_*$  se numește integrala inferioară.

**Lema 2.1.3**  $I_* \leq I^*$ .

*Demonstrație.* Din Lema 2.1.2 rezultă că:  $s_{\Delta'} \leq S_{\Delta''}$ , oricare ar fi diviziunile  $\Delta'$  și  $\Delta''$ . Fixând pentru moment diviziunea  $\Delta''$  obținem:  $I_* = \sup_{\Delta'} s_{\Delta'} \leq S_{\Delta''}$ . Cum  $\Delta''$  a fost arbitrară, în continuare avem  $I_* \leq \inf_{\Delta''} S_{\Delta''} = I^*$ .

**Definiția 2.1.2** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție mărginită. Spunem că  $f$  este (D)-integrabilă (integrabilă în sensul lui Darboux) pe  $[a, b]$  dacă  $I_* = I^* = I$ .

Valoarea comună  $I$  o notăm cu  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Lema 2.1.4** Pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încât oricare diviziune  $\Delta$  a intervalului  $[a, b]$  cu  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$  avem:

$$I_* - \varepsilon < s_\Delta \leq S_\Delta < I^* + \varepsilon \quad (4)$$

*Demonstrație.*

Vom demonstra inegalitatea  $I_* - \varepsilon < s_\Delta$ , lăsând în seama cititorului demonstrația celeilalte inegalități. Deoarece  $I_* = \sup_{\Delta} s_\Delta$  rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$  există o diviziune  $\Delta_0$  a intervalului  $[a, b]$  astfel încât:  $I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\Delta_0}$ .

Să presupunem că  $\Delta_0 : a = c_0 < c_1 < \dots < c_k < \dots < c_p = b$ .

Fie  $\mu = \min_{1 \leq k \leq p} (c_k - c_{k-1})$  și fie  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  o diviziune a intervalului  $[a, b]$  cu  $\|\Delta\| < \mu$ . Dacă notăm cu  $\bar{\Delta} = \Delta_0 \cup \Delta$ , atunci în intervalul  $[x_{i-1}, x_i]$  se află cel mult un punct  $c_k$  din diviziunea  $\Delta_0$ .

$$\begin{array}{c} | \text{-----} | \\ x_{i-1} \qquad \qquad c_k \qquad \qquad x_i \end{array}$$

Fie  $m'_i = \inf \{f(x); x \in [x_{i-1}, c_k]\}$  și  $m''_i = \inf \{f(x); x \in [c_k, x_i]\}$ . Contribuția subintervalului  $[x_{i-1}, x_i]$  în diferența  $s_{\bar{\Delta}} - s_\Delta$  va fi

$$m'_i(c_k - x_{i-1}) + m''_i(x_i - c_k) - m_i(x_i - x_{i-1})$$

și este evident majorată de  $(M - m)(x_i - x_{i-1})$ . Cum în diviziunea  $\bar{\Delta}$  există  $(p - 1)$  puncte interioare  $c_k$  rezultă că avem următoarea majorare:

$$s_{\bar{\Delta}} - s_\Delta \leq (p - 1)(M - m)\|\Delta\| \quad (5)$$

Fie acum  $\delta_\varepsilon = \min \left\{ \mu; \frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)} \right\}$ , fie  $\Delta$  o diviziune a intervalului  $[a, b]$  cu  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$  și fie  $\bar{\Delta} = \Delta_0 \cup \Delta$ . Cum  $\delta_\varepsilon \leq \mu$  rezultă că  $\|\Delta\| < \mu$  și conform (5) avem:

$$s_{\bar{\Delta}} - s_{\Delta} \leq (p-1)(M-m)\|\Delta\| < (p-1)(M-m) \frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Așadar avem  $I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\Delta_0} \leq s_{\bar{\Delta}} \leq s_{\Delta} + \frac{\varepsilon}{2}$ , deci  $I_* - \varepsilon \leq s_{\Delta}$ .

Cu aceasta lema este demonstrată.

### **Teorema 2.1.1 (Criteriul de integrabilitate al lui Darboux)**

*Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mărginită. Condiția necesară și suficientă ca  $f$  să fie integrabilă pe  $[a, b]$  este ca pentru orice  $\varepsilon > 0$ , să existe  $\delta_\varepsilon > 0$ , astfel încât oricare ar fi diviziunea  $\Delta$  a intervalului  $[a, b]$ , cu  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ , să avem  $S_{\Delta} - s_{\Delta} < \varepsilon$ .*

*Demonstrație.*

**Necesitatea.** Presupunem că  $I_* = I^* = I$ . Din Lema 2.1.4 rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$\exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $I - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\Delta} \leq S_{\Delta} < I + \frac{\varepsilon}{2}$ , pentru  $\forall \Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ . Evident,

$S_{\Delta} - s_{\Delta} < \left(I + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$ . Așadar  $S_{\Delta} - s_{\Delta} < \varepsilon$  pentru orice  $\Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ .

**Suficiența.** Presupunem că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât, oricare ar fi  $\Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$  avem  $S_{\Delta} - s_{\Delta} < \varepsilon$ .

Deoarece  $s_{\Delta} \leq I_* \leq I^* \leq S_{\Delta}$ , rezultă că  $0 \leq I^* - I_* \leq S_{\Delta} - s_{\Delta} < \varepsilon$ .

Cum  $\varepsilon > 0$  este arbitrar, aceasta implică  $I^* - I_* = 0$ , deci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

## **2.2. CLASE DE FUNCȚII INTEGRABILE**

**Teorema 2.1.1** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă, atunci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

*Demonstrație.* Fie  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  o diviziune oarecare a intervalului  $[a, b]$ . Deoarece, o funcție continuă pe un interval compact



este mărginită și își atinge marginile rezultă că  $\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  și  $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$  astfel încât  $m_i = f(\xi_i)$  și  $M_i = f(\eta_i)$ . Așadar, avem

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^n [f(\eta_i) - f(\xi_i)](x_i - x_{i-1}).$$

Pe de altă parte,  $f$  este uniform continuă pe  $[a, b]$ , deci  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât oricare ar fi  $x', x'' \in [a, b]$  cu  $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$ , avem  $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

Dacă presupunem acum că  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$  rezultă  $|\eta_i - \xi_i| \leq x_i - x_{i-1} \leq \|\Delta\| < \delta_\varepsilon$  deci

$$S_\Delta - s_\Delta < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Așadar,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  (cel de la continuitatea uniformă) astfel încât  $\forall \Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$  avem  $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$ . Din Teorema 2.1.1 rezultă că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

**Teorema 2.2.2** Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este monotonă, atunci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

*Demonstrație.*

Vom face demonstrația pentru cazul când  $f$  este crescătoare și nu se reduce la o constantă. Cazul când  $f$  este descrescătoare se tratează asemănător. Dacă  $f$  se reduce la o constantă, adică  $f(x) = c, \forall x \in [a, b]$ , atunci  $s_\Delta = S_\Delta = c(b-a)$ ,  $\forall \Delta$  deci  $I_* = I^* = c(b-a)$ .

Fie deci  $f$  crescătoare, astfel încât  $f(a) < f(b)$  și fie

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  o diviziune oarecare a intervalului  $[a, b]$ . Deoarece  $f$  este crescătoare, avem  $m_i = f(x_{i-1})$  și  $M_i = f(x_i)$ , deci

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}).$$

Fie  $\varepsilon > 0$  și fie  $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ . Dacă presupunem că  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ , atunci vom

avea  $S_\Delta - s_\Delta < \delta_\varepsilon \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(b) - f(a)] = \varepsilon$ .

Așadar,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall \Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$  avem  $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$ . Din Teorema 2.1.1 rezultă că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

### 2.3. SUME RIEMANN. CRITERIUL DE INTEGRABILITATE RIEMANN

Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  o diviziune a intervalului  $[a, b]$  și  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  un punct oarecare. Dacă notăm cu  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , atunci suma Riemann asociată funcției  $f$ , diviziunii  $\Delta$  și punctelor intermediare  $\xi_i$ , se notează cu  $\sigma_\Delta(f; \xi)$  și este prin definiție

$$\sigma_\Delta(f; \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

**Definiția 2.3.1** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Spunem că  $f$  este (R)-integrabilă (integrabilă în sensul lui Riemann) pe  $[a, b]$  dacă există un număr finit  $I$ , astfel încât  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  cu proprietatea că oricare ar fi diviziunea  $\Delta$ , cu  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$  și oricare ar fi punctele intermediare  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , avem  $|\sigma_\Delta(f; \xi) - I| < \varepsilon$ .

**Teorema 2.3.1** Dacă  $f$  este (R)-integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci  $f$  este mărginită pe  $[a, b]$ .

*Demonstrație.*

Prin ipoteză, există  $I \in \mathbb{R}$ , astfel încât pentru  $\varepsilon = 1$ , există  $\delta_1 > 0$  cu proprietatea că oricare ar fi  $\Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta_1$  și oricare ar fi punctele intermediare  $\xi_i$  avem:

$$I - 1 < \sigma_\Delta(f; \xi) < I + 1 \quad (1)$$

Fie  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  cu  $\|\Delta\| < \delta_1$  și fie  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Presupunem prin absurd că  $f$  nu este mărginită pe  $[a, b]$ . Atunci, există un subinterval  $[x_{j-1}, x_j]$  astfel încât  $f$  nu este mărginită pe  $[x_{j-1}, x_j]$ . Pentru a face o alegere, să presupunem că  $\sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\} = +\infty$ . Cum  $f$  nu este mărginită superior pe intervalul  $[x_{j-1}, x_j]$ , rezultă că există  $\bar{\xi}_j \in [x_{j-1}, x_j]$  astfel încât

$$f(\bar{\xi}_j) > \frac{I - s + 1}{x_j - x_{j-1}}, \text{ unde am notat cu } s = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

$$\text{Fie } \bar{\xi}_i = \begin{cases} \xi_i & \text{dacă } i \neq j \\ \bar{\xi}_j & \text{dacă } i = j \end{cases} \text{ și } \bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n). \text{ Rezultă}$$

$$\sigma_{\Delta}(f; \bar{\xi}) = s + f(\bar{\xi}_j)(x_j - x_{j-1}) > s + \frac{I - s + 1}{x_j - x_{j-1}}(x_j - x_{j-1}) = I + 1$$

Așadar  $\sigma_{\Delta}(f; \bar{\xi}) > I + 1$  ceea ce contrazice (1). Prin urmare, ipoteza că  $f$  nu e mărginită pe  $[a, b]$  ne conduce la o contradicție.

Următoarea teoremă ne arată că cele două definiții ale integrabilității sunt echivalente.

**Teorema 2.3.2** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mărginită. Atunci  $f$  este  $(D)$ -integrabilă pe  $[a, b]$  dacă și numai dacă  $f$  este  $(R)$ -integrabilă pe  $[a, b]$ .

*Demonstrație.*

Dacă  $f$  este  $(D)$ -integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci  $I_* = I^* = I$ . Pe de altă parte, din Teorema 2.1.1. rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0$  astfel încât oricare ar fi diviziunea  $\Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon}$  avem  $S_{\Delta} - s_{\Delta} < \varepsilon$ .

Cum  $s_{\Delta} \leq I \leq S_{\Delta}$  și  $s_{\Delta} \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi) \leq S_{\Delta}, \forall \xi$ , rezultă că  $|\sigma_{\Delta}(f, \xi) - I| < \varepsilon$  pentru orice  $\Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon}$  și orice puncte intermediare  $\xi_i$ , deci  $f$  este  $(R)$ -integrabilă.

Reciproc, să presupunem că  $f$  este  $(R)$ -integrabilă. Atunci există  $I \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că, pentru  $\varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0$  astfel încât  $\forall \Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon}$  și  $\forall \xi$  avem:

$$I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_{\Delta}(f; \xi) < I + \frac{\varepsilon}{4} \quad (2)$$

Fie  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  cu  $\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon}$ . Deoarece  $M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ , rezultă că există  $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$  astfel încât

$$M_i - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(\alpha_i) \quad (3)$$

Amplificând inegalitatea (3) cu  $(x_i - x_{i-1})$  și sumând rezultă:

$$S_{\Delta} - \frac{\varepsilon}{4} < \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = \sigma_{\Delta}(f; \alpha), \text{ unde } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Ținând seama acum și de (2) obținem:

$$S_{\Delta} < I + \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

În mod asemănător se arată că

$$s_{\Delta} > I - \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

Din (4) și (5) rezultă că  $S_{\Delta} - s_{\Delta} < \varepsilon$ , pentru orice  $\Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon}$ , deci  $f$  este  $(D)$ -integrabilă, conform Teoriei 2.1.1.

**Teorema 2.3.3 (Criteriul de integrabilitate al lui Riemann)**

Condiția necesară și suficientă ca  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  să fie integrabilă pe  $[a, b]$ , este să existe un număr finit  $I$ , astfel încât pentru orice șir de diviziuni  $\{\Delta_n\}$  ale intervalului  $[a, b]$  cu proprietatea că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$  și orice alegere a punctelor intermediare  $\xi^{(n)}$  să avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f; \xi^{(n)}) = I$ .

*Demonstrație.*

**Necesitatea.** Prin ipoteză există  $I \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  cu proprietatea că  $\forall \Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$  și  $\forall \xi$  avem  $|\sigma_\Delta(f; \xi) - I| < \varepsilon$ .

Fie  $\{\Delta_n\}$  un șir de diviziuni cu  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ . Atunci  $\exists$  un rang  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\|\Delta_n\| < \delta_\varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_0$ . Conform ipotezei avem  $|\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^{(n)}) - I| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq n_0$  și orice set de puncte intermediare  $\xi^{(n)}$  corespunzător diviziunii  $\Delta_n$ . Rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f; \xi^{(n)}) = I$ .

**Suficiență.** Presupunem că există  $I \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că pentru orice șir de diviziuni  $\{\Delta_n\}$  cu  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$  și orice set de puncte intermediare  $\xi^{(n)}$  avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f; \xi^{(n)}) = I.$$

Presupunem prin absurd că  $f$  nu este integrabilă, deci că oricare ar fi numărul finit  $I$ , există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încât  $\forall \delta > 0, \exists \Delta_\delta$  cu  $\|\Delta_\delta\| < \delta$  și există un set de puncte intermediare  $\xi^\delta$  astfel încât  $|\sigma_{\Delta_\delta}(f, \xi^\delta) - I| \geq \varepsilon_0$ .

În particular, pentru  $\delta = \frac{1}{n}$  rezultă că  $\exists \Delta_n$  cu  $\|\Delta_n\| < \frac{1}{n}$  și  $\xi^{(n)}$  astfel încât  $|\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^{(n)}) - I| \geq \varepsilon_0$ . Aceasta înseamnă că  $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^{(n)}) \not\rightarrow I$ , ceea ce contrazice ipoteza făcută.

**Definiția 2.3.2** Spunem că o mulțime  $A \subset \mathbb{R}$  este neglijabilă (de măsură Lebesgue nulă), dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  un șir de intervale deschise  $(I_n)_{n \geq 1}$  cu următoarele proprietăți :

a)  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$ , unde cu  $l(I_n)$  am notat lungimea intervalului  $I_n$ .

Precizăm că unele din intervalele  $I_n$  pot să fie mulțimea vidă  $\emptyset$ .

**Propoziția 2.3.1.** *Orice mulțime care se reduce la un punct este neglijabilă*

*Demonstrație.*

Fie  $A = \{x_0\}$ . Putem alege  $I_1 = \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{3}, x_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$  și  $I_n = \emptyset$  pentru  $n \geq 2$ .

Evident  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$ .

Următoarea afirmație este evidentă:

**Propoziția 2.3.2** *Dacă  $A \subset B$  și  $B$  este neglijabilă, rezultă că  $A$  este neglijabilă.*

**Propoziția 2.3.3** *O reuniune numărabilă de mulțimi neglijabile este de asemenea neglijabilă.*

*Demonstrație.*

Fie  $A_n \subset \mathbb{R}^2$  neglijabilă,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Rezultă că pentru  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  un șir de intervale deschise  $(I_{nm})_{m \geq 1}$  cu proprietățile:  $A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{nm}$  și  $\sum_{m=1}^{\infty} l(I_{nm}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ .

În continuare avem:  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{nm} \right)$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} l(I_{nm}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$ ,

deci, mulțimea  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  este neglijabilă.

**Corolarul 2.3.1** *Orice mulțime finită sau numărabilă din  $\mathbb{R}^2$  este neglijabilă.*

Afirmația rezultă din Propozițiile 2.3.1 și 2.3.3.

În continuare prezentăm fără demonstrație următoarea teoremă.

**Teorema 2.3.4 (Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue)**

*Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Condiția necesară și suficientă ca  $f$  să fie integrabilă pe  $[a, b]$  este ca  $f$  să fie mărginită pe  $[a, b]$  și mulțimea punctelor sale de discontinuitate să fie neglijabilă.*

## 2.4. PROPRIETĂȚILE INTEGRALEI RIEMANN

**2.4.1.**  $\int_a^b 1 dx = b - a$ .

Afirmația rezultă imediat din observația că orice sumă Riemann

$$\sigma_{\Delta}(1; \xi) = b - a$$

### 2.4.2. Proprietatea de linearitate

Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt integrabile, atunci funcția  $\alpha f + \beta g$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

*Demonstrație.*

Fie  $\{\Delta_n\}$  un șir de diviziuni cu proprietatea că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$  și fie  $\xi^{(n)}$  un set de puncte intermediare oarecare pentru diviziunea  $\Delta_n$ . Avem:

$$\sigma_{\Delta_n}(\alpha f + \beta g; \xi^{(n)}) = \alpha \sigma_{\Delta_n}(f; \xi^{(n)}) + \beta \sigma_{\Delta_n}(g; \xi^{(n)}).$$

Deoarece membrul drept are limită finită când  $n \rightarrow \infty$  și anume  $\alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$ , rezultă că și membrul stâng are limită finită, deci  $\alpha f + \beta g$  este integrabilă și în plus  $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$ .

### 2.4.3. Proprietatea de monotonie

Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$  și  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

Afirmația rezultă imediat din observația că  $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$  și din proprietatea de linearitate a integralei Riemann.

**2.4.4.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci  $|f|$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Fie  $A$  mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției  $|f|$  din intervalul  $[a, b]$  și  $B$  mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui  $f$  din intervalul  $[a, b]$ . Se știe că dacă  $f$  este continuă într-un punct, atunci  $|f|$  este continuă în acel punct. Așadar, avem  $A \subset B$ . Conform Teoremei 2.3.4,  $B$  este neglijabilă. Rezultă atunci că și  $A$  este neglijabilă, deci că  $|f|$  este integrabilă.

Pe de altă parte avem:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in [a, b].$$

Din Proprietatea 3) de monotonie a integralei, rezultă că

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{deci} \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**2.4.5.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ , atunci  $fg$  este integrabilă pe  $[a, b]$ . Într-adevăr, fie  $A/B/C$  mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui  $f/g/fg$ . Se știe că dacă  $f$  și  $g$  sunt continue într-un punct, atunci  $fg$  este continuă în acest punct. Rezultă că  $C \subset A \cup B$ . Cum  $A$  și  $B$  sunt neglijabile, rezultă că  $A \cup B$  este neglijabilă, deci  $C$  este neglijabilă. Conform Teoremei 2.3.4 rezultă că  $fg$  este continuă pe  $[a, b]$ .

### 2.4.6. Teorema de medie

Fie  $f$  și  $g$  două funcții integrabile pe  $[a, b]$ . Presupunem că  $g$  păstrează semn constant pe  $[a, b]$ . Dacă notăm cu  $m = \inf \{f(x); x \in [a, b]\}$  și cu

$M = \sup \{f(x); x \in [a, b]\}$ , atunci există  $m \leq \mu \leq M$  astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

*Demonstrație.*

Presupunem că  $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ . Deoarece  $m \leq f(x) \leq M$ ,  $\forall x \in [a, b]$  rezultă  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \forall x \in [a, b]$ .

Din Proprietățile 2) și 3) avem

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \quad (2)$$

Dacă  $\int_a^b g(x) dx = 0$ , atunci și  $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$  și egalitatea (1) are loc pentru orice  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Să presupunem că  $\int_a^b g(x) dx \neq 0$ . Cum  $g \geq 0$  rezultă  $\int_a^b g(x) dx > 0$ .

Împărțind inegalitatea (2) cu  $\int_a^b g(x) dx$  obținem:  $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$ .

Dacă notăm cu  $\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$ , rezultă că  $m \leq \mu \leq M$ , deci

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx.$$

**Corolarul 2.4.1** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă și  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă. Dacă  $g$  păstrează semn constant pe  $[a, b]$ , atunci există  $\xi \in [a, b]$  astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

*Demonstrație.*

Deoarece  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ , rezultă că există  $\alpha, \beta \in [a, b]$  astfel încât  $m = f(\alpha)$  și  $M = f(\beta)$ . Din Teorema de medie, știm că există  $m \leq \mu \leq M$  astfel încât  $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ . Pe de altă parte,  $f$  are proprietatea Darboux pe  $[a, b]$ , deci există  $\xi$  între  $\alpha$  și  $\beta$ , deci în  $[a, b]$ , astfel încât  $\mu = f(\xi)$ . Așadar avem

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

**Corolarul 2.4.2** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă, atunci există  $m \leq \mu \leq M$  astfel încât  $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ .

Afirmația rezultă imediat din Teorema de medie pentru cazul particular când  $g = 1$ .

**Corolarul 2.4.3** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă, atunci există  $\xi \in [a, b]$  astfel încât  $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ .

Afirmația rezultă imediat din Corolarul 2.4.1, pentru cazul particular când  $g = 1$ .

**2.4.7.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și  $a < c < b$ , atunci  $f$  este integrabilă pe  $[a, c]$  și  $[c, b]$  și  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .

*Demonstrație.*

Faptul că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și  $[c, b]$  rezultă imediat din Teorema 2.3.4.

Fie  $\{\Delta'_n\}$  un șir de diviziuni ale intervalului  $[a, c]$  cu  $\|\Delta'_n\| \rightarrow 0$  și fie  $\{\Delta''_n\}$  un șir de diviziuni ale intervalului  $[c, b]$  cu  $\|\Delta''_n\| \rightarrow 0$ . Dacă notăm cu  $\Delta_n = \Delta'_n \cup \Delta''_n$ , atunci  $\Delta_n$  este o diviziune a intervalului  $[a, b]$  și  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ .

Fie de asemenea  $\alpha^{(n)}(\beta^{(n)})$  un set de puncte intermediare pentru diviziunea  $\Delta'_n$  (respectiv  $\Delta''_n$ ). Dacă notăm cu  $\xi^{(n)} = \alpha^{(n)} \cup \beta^{(n)}$ , atunci  $\xi^{(n)}$  este un set de puncte intermediare pentru  $\Delta_n$ .

Trecând la limită după  $n$  în egalitatea



$\sigma_{\Delta_n}(f; \xi^{(n)}) = \sigma_{\Delta'_n}(f; \alpha^{(n)}) + \sigma_{\Delta''_n}(f; \beta^{(n)})$ , rezultă că

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Următoarea teoremă ne asigură că orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval.

**Teorema 2.4.8** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă și fie  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  
 $\forall x \in [a, b]$ . Atunci  $f$  este derivabilă pe  $(a, b)$  și  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in (a, b)$ .

*Demonstrație.*

Fie  $x_0 \in (a, b)$  oarecare. Să observăm pentru început că  $\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt$ . Într-adevăr, dacă  $x_0 < x$  atunci afirmația rezultă din egalitatea  $\int_a^x = \int_a^{x_0} + \int_{x_0}^x$ . Dacă  $x < x_0$ , atunci  $\int_a^{x_0} = \int_a^x + \int_x^{x_0}$  deci  $\int_a^x - \int_a^{x_0} = -\int_x^{x_0} = \int_{x_0}^x$ .

Așadar, avem  $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0}$ .

Conform Corolarului 2.4.3 rezultă că  $\exists \xi$  în intervalul închis de capete  $x_0$  și  $x$  astfel încât  $\int_{x_0}^x f(t) dt = f(\xi)(x - x_0)$ . Cum  $f$  este continuă în  $x_0$ , în continuare avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0), \text{ deci } F'(x_0) = f(x_0).$$

**Teorema 2.4.9 (Leibniz-Newton)**

Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă. Dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$  pe  $[a, b]$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

*Demonstrație.*

Fie  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_n = b$  o diviziune oarecare a intervalului  $[a, b]$ . Observăm că  $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$ .

Pe de altă parte, din Teorema Lagrange rezultă că există  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$  astfel încât:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Dacă notăm cu  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  obținem:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sigma_{\Delta}(f; \xi).$$

Fie  $\{\Delta_n\}$  un șir de diviziuni de normă tinzând la zero și fie  $\xi^{(n)}$  setul de puncte intermediare pentru  $\Delta_n$  care rezultă din Teorema Lagrange. Rezultă:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f; \xi^{(n)}) = F(b) - F(a),$$

## CAPITOLUL 3

### INTEGRALE GENERALIZATE ȘI CU PARAMETRU

#### 3.1. INTEGRALE GENERALIZATE

Teoria integralei definite s-a făcut pentru funcții mărginite, definite pe intervale mărginite. În cele ce urmează vom da un sens unor integrale de forma  $\int_a^\infty f(x)dx$  sau  $\int_a^b f(x)dx$ , unde  $b$  este finit și  $f$  este nemărginită pe  $[a, b]$ . Vom trata ambele cazuri unitar.

**Definiția 3.1.1** Fie  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b$  finit sau nu. Presupunem că  $f$  este integrabilă pe intervalul compact  $[a, u]$ , oricare  $a < u < b$ . Dacă există

$\lim_{u \rightarrow b} \int_a^u f(x)dx$  și e finită, spunem că  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă și notăm cu

(v)  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \rightarrow b} \int_a^u f(x)dx$ . În caz contrar, dacă limita nu există sau e infinită, spunem că  $\int_a^b f(x)dx$  este divergentă.

**Exemplul 3.1.1** Să se studieze convergența integralei  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ . Avem

$$\int_1^u \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln u & \text{dacă } \alpha = 1 \\ \frac{u^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} & \text{dacă } \alpha \neq 1. \end{cases} \quad \text{Observăm că dacă } \alpha > 1, \text{ atunci}$$

(v)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{-1}{1-\alpha}$ , deci  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$  este convergentă și dacă  $\alpha \leq 1$ , atunci

$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$ , deci  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$  este divergentă. În particular,  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$  este

convergentă și (v)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$ , în timp ce  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$  este divergentă.

**Exemplul 3.1.2** Să se studieze convergența integralei:  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$  unde  $b$  este finit.

$$\int_a^u \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \ln \frac{b-u}{b-a} & \text{dacă } \alpha=1 \\ \frac{1}{1-\alpha} \left[ (b-u)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha} \right] & \text{dacă } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Observăm că dacă  $\alpha < 1$  atunci

$$(v) \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{u \nearrow b} \int_a^u \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

iar dacă  $\alpha \geq 1$ ,  $\lim_{u \nearrow b} \int_a^u \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\infty$ . Așadar,  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$  este convergentă pentru  $\alpha < 1$  și divergentă pentru  $\alpha \geq 1$ .

În particular,  $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}$  este convergentă și  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)\sqrt{b-x}}$  este divergentă.

**Observația 3.1.1** Fie  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  finit sau nu. Presupunem că  $f$  este integrabilă pe intervalul  $[u, b]$ , oricare ar fi  $a < u < b$ . Notăm cu  $(v) \int_a^b f(x)dx = \lim_{u \nearrow b} \int_u^b f(x)dx$ , dacă această limită există și e finită, și spunem că  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă. În caz contrar,  $\int_a^b f(x)dx$  este divergentă. Procedând ca în exemplul 3.1.2 rezultă că  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ , unde  $a$  este finit, este convergentă pentru  $\alpha < 1$  și divergentă pentru  $\alpha \geq 1$ . De exemplu  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  este convergentă și  $\int_0^1 \frac{dx}{x}$  este divergentă.

**Teorema 3.1.1** Fie  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b$  finit sau nu. Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, u]$  oricare ar fi  $a < u < b$ , atunci  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists a < \delta_\varepsilon < b$  astfel încât  $\left| \int_{u'}^{u''} f(x)dx \right| < \varepsilon$  pentru orice  $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ .

*Demonstrație.*

Pentru orice  $a < u < b$  notăm cu  $F(u) = \int_a^u f(x)dx$ . Conform Definiției 3.1.1,  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă dacă și numai dacă există  $L = \lim_{u \nearrow b} F(u)$  și e finită. Pe de altă parte, din Teorema Cauchy-Balzano rezultă că existența acestei limite finite este echivalentă cu faptul că  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  o vecinătate  $V_\varepsilon$  a lui  $b$  astfel încât  $|F(u') - F(u'')| < \varepsilon$  pentru orice  $u', u'' \in V_\varepsilon \cap [a, b)$ . Dacă  $b$  este finit, putem presupune că  $V_\varepsilon$  este de forma  $(b - \eta_\varepsilon, b + \eta_\varepsilon)$  unde  $a < b - \eta_\varepsilon < b$  și alegem  $\delta_\varepsilon = b - \eta_\varepsilon$ . Dacă  $b = +\infty$  putem presupune că  $V_\varepsilon$  este de forma  $(\delta_\varepsilon, \infty)$  unde  $a < \delta_\varepsilon < b$ . În ambele situații, dacă  $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$  rezultă că  $u', u'' \in V_\varepsilon \cap [a, b)$ , deci că  $|F(u') - F(u'')| < \varepsilon$ . Pe de altă parte, se observă imediat că

$$|F(u') - F(u'')| = \left| \int_a^{u'} f(x)dx - \int_a^{u''} f(x)dx \right| = \left| \int_{u'}^{u''} f(x)dx \right|.$$

Așadar,  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă, dacă și numai dacă pentru  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists a < \delta_\varepsilon < b$  astfel încât pentru orice  $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$  avem  $\left| \int_{u'}^{u''} f(x)dx \right| < \varepsilon$ .

**Definiția 3.1.2** Spunem că  $\int_a^b f(x)dx$  este absolut convergentă dacă  $\int_a^b |f(x)|dx$  este convergentă.

**Corolarul 3.1.1** Dacă  $\int_a^b f(x)dx$  este absolut convergentă, atunci  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă.

*Demonstrație.*

Afirmația rezultă din Teorema 3.1.1 și din Observația că  $\left| \int_{u'}^{u''} f(x)dx \right| \leq \int_{u'}^{u''} |f(x)|dx$ .

**Teorema 3.1.2** Fie  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $b$  finit sau nu. Presupunem că  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe intervalul  $[a, u]$ , oricare ar fi  $a < u < b$  și că  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in [a, b)$ . Atunci

1) Dacă  $\int_a^b g(x)dx$  converge, rezultă că și  $\int_a^b f(x)dx$  converge.

2) Dacă  $\int_a^b f(x)dx$  diverge, rezultă că și  $\int_a^b g(x)dx$  diverge.

*Demonstrație.*

Fie  $F(u) = \int_a^u f(x)dx$  și  $G(u) = \int_a^u g(x)dx$ , unde  $a < u < b$ . Din proprietatea de monotonie a integralei rezultă că  $0 \leq F(u) \leq G(u)$ ,  $\forall a < u < b$ .

$F$  și  $G$  sunt monoton crescătoare, deoarece  $f$  și  $g$  iau valori în  $\mathbb{Y}_+$ .

Dacă presupunem că  $\int_a^u g(x)dx$  este convergentă rezultă că  $(v) \int_a^b g(x)dx = \lim_{u \nearrow b} G(u)$  există și e finită și  $G(u) \leq (v) \int_a^b g(x)dx$ .

Cum  $F \leq G$  rezultă că  $F(u) \leq (v) \int_a^b g(x)dx$ ,  $\forall a < u < b$ . Faptul că  $F$  este monoton crescătoare și mărginită superior pe  $[a, b)$  implică că există  $\lim_{u \nearrow b} F(u) \leq (v) \int_a^b g(x)dx$ , deci  $\int_a^b f(x)dx$  converge.

Dacă presupunem că  $\int_a^b f(x)dx$  este divergentă, rezultă că  $\lim_{u \nearrow b} F(u) = +\infty$  și cu atât mai mult  $\lim_{u \nearrow \infty} G(u) = +\infty$ , deci  $\int_a^b g(x)dx$  diverge.

**Exemplul 3.1.3** Să se studieze convergența integralei  $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}dx$ . Deoarece

$\left| \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$ ,  $\forall x \in [1, \infty)$  și  $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$  este convergentă, din Teorema 3.1.2 rezultă că  $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x\sqrt{x}}dx$  este convergentă.

Rezultă că  $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}dx$  este absolut convergentă, deci convergentă în virtutea Corolarului 3.1.1.

**Observația 3.1.2** Fie  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{Y}$  integrabilă pe fiecare interval compact închis în  $[a, b)$  și fie  $a < c < b$ . Atunci,  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă dacă și numai dacă  $\int_c^b f(x)dx$  este convergentă. Într-adevăr, este suficient să observăm că pentru orice  $c < u < b$ , avem  $\int_a^u f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^u f(x)dx$ , iar  $\int_a^c f(x)dx$  este un număr finit,  $f$  fiind integrabilă pe  $[a, c]$ .

**Teorema 3.1.3** Fie  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{Y}_+$ , integrabilă pe intervalul  $[a, u]$  pentru orice  $a < u < b$ . Atunci

1) Dacă  $\exists \alpha > 1$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x)$  există și e finită rezultă că

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ este convergentă.}$$

2) Dacă  $\exists \alpha \leq 1$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x)$  există și este strict pozitivă, rezultă că  $\int_a^\infty f(x)dx$  este divergentă.

*Demonstrație.*

Fie  $\alpha > 1$  și fie  $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) < \infty$ . Din definiția limitei unei funcții rezultă că, pentru orice  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon > a$  astfel încât  $l - \varepsilon < x^\alpha f(x) < l + \varepsilon$  pentru orice  $x > \delta_\varepsilon$ . Așadar,  $f(x) < \frac{l + \varepsilon}{x^\alpha}$ , pentru orice  $x > \delta_\varepsilon$ .

Cum  $\int_{\delta_\varepsilon}^\infty \frac{l + \varepsilon}{x^\alpha} dx$  este convergentă în acest caz (Vezi Exemplul 3.1.1), din Teorema 3.1.2 rezultă că  $\int_{\delta_\varepsilon}^\infty f(x)dx$  este convergentă. Ținând seama și de Observația 3.1.2 rezultă că  $\int_a^\infty f(x)dx$  este convergentă.

Presupunem acum că  $\exists \alpha \leq 1$ , astfel încât  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = l$  și e finită. Deoarece  $l > 0$ , putem presupune că  $0 < \varepsilon < l$ . Pentru un astfel de  $\varepsilon$ , există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $l - \varepsilon < x^\alpha f(x) < l + \varepsilon$  pentru orice  $x > \delta_\varepsilon$ .

În particular avem  $\frac{l - \varepsilon}{x^\alpha} < f(x)$ ,  $\forall x > \delta_\varepsilon$ .

Deoarece  $\int_{\delta_\varepsilon}^\infty \frac{l - \varepsilon}{x^\alpha} dx$  este divergentă (Vezi exemplul 3.1.1), din Teorema 3.1.2 rezultă că  $\int_{\delta_\varepsilon}^\infty f(x)dx$  este divergentă. În sfârșit, din Observația 3.1.2 rezultă că  $\int_a^\infty f(x)dx$  este divergentă.

Dacă  $\exists \alpha \leq 1$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ , atunci  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon > a$  astfel încât  $x^\alpha f(x) > \varepsilon$  pentru orice  $x \in (\delta_\varepsilon, \infty)$ . Așadar,  $f(x) > \frac{\varepsilon}{x^\alpha}$ ,  $\forall x > \delta_\varepsilon$ . Cum

$\int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} \frac{\varepsilon}{x^\alpha} dx$  este divergentă în acest caz, rezultă că  $\int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} f(x) dx$  este divergentă, deci  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  este divergentă.

**Exemplul 3.1.4** Să se studieze convergența integralei  $\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , unde  $P$  și  $Q$  sunt polinoame,  $\text{gr}P \leq \text{gr}Q - 2$  și  $Q(x) \neq 0, \forall x > a$ .

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{|P(x)|}{|Q(x)|}$  este finită, din Teorema 3.1.3 rezultă că  $\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  este absolut convergentă, deci convergentă conform Corolarului 3.1.1.

**Teorema 3.1.4** Fie  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{Y}_+$ , integrabilă pe intervalul  $[a, u]$  pentru orice  $a < u < b < \infty$ . Atunci

1) Dacă  $\exists \alpha < 1$  astfel încât  $\lim_{x \nearrow b} (b-x)^\alpha f(x)$  există și e finită, rezultă că

$\int_a^b f(x) dx$  este convergentă.

2) Dacă  $\exists \alpha \geq 1$  astfel încât există  $\lim_{x \nearrow b} (b-x)^\alpha f(x) > 0$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx$  diverge.

Demonstrația este asemănătoare cu demonstrația Teoremei 3.1.3, ținându-se seama de faptul că  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$  este convergentă pentru  $\alpha < 1$  și divergentă pentru  $\alpha \geq 1$  (Exemplul 3.1.2).

**Exemplul 3.1.5**  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$  este convergentă deoarece

$\lim_{x \nearrow 2} (2-x)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$ , în timp ce  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2-x)^3}}$  este divergentă,

deoarece  $\lim_{x \nearrow 2} (2-x)^3 \frac{1}{\sqrt{(x+1)(2-x)^3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ .

Are loc de asemenea, următoarea teoremă:

**Teorema 3.1.5** Fie  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{Y}_+$ , integrabilă pe  $[v, b]$  pentru orice  $-\infty < a < v < b$ . Atunci:



- 1) Dacă  $\exists \alpha < 1$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^\alpha f(x)$  există și e finită, rezultă că  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă.
- 2) Dacă  $\exists \alpha \geq 1$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^\alpha f(x) > 0$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx$  este divergentă.

**Exemplul 3.1.6**  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$  este convergentă, deoarece

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} = 1 < \infty \quad \text{iar} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^5(x+1)}} \text{ este divergentă, deoarece}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{5/2} \frac{1}{\sqrt{x^5(x+1)}} = 1 > 0.$$

Următoarea teoremă este cunoscută sub numele de „Criteriul integral al lui Cauchy”.

**Teorema 3.1.6** Fie  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  o funcție monoton descrescătoare. Atunci  $\int_1^\infty f(x) dx$  și seria  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$  au aceeași natură.

*Demonstrație.*

Deoarece  $f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$  pentru orice  $x \in [n-1, n]$  rezultă că

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1), \quad \forall n \geq 2 \text{ și mai departe că}$$

$$\sum_{n=2}^m f(n) \leq \int_1^m f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{m-1} f(n), \text{ pentru orice } m \geq 2 \quad (1)$$

Dacă presupunem că seria  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$  este convergentă, rezultă că  $\exists M > 0$

astfel încât  $\sum_{n=1}^{m-1} f(n) < M, \forall m \geq 2$ . Ținând seama de (1) rezultă că  $\int_1^m f(x) dx < M$

pentru orice  $m \geq 2$ .

Fie  $u > 1$  oarecare și fie  $m \in \mathbb{N}^*, m > u$ . Deoarece  $f \geq 0$ , rezultă că

$\int_1^u f(x) dx \leq \int_1^m f(x) dx < M$ . Așadar,  $\exists \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u f(x) dx \leq M$ , deci  $\int_1^\infty f(x) dx$  este convergentă. Dacă presupunem acum că  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$  este divergentă, rezultă că  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m f(n) = \infty$  și deci că  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^m f(x) dx = +\infty$ . De unde deducem că  $\int_1^\infty f(x) dx$  este divergentă.

**Exemplul 3.1.7**  $\int_1^\infty \frac{dx}{n^\alpha}$  are aceeași natură cu suma  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ , deci este convergentă dacă  $\alpha > 1$  și este divergentă dacă  $\alpha \leq 1$ .

**Teorema 3.1.7 (Criteriul Dirichlet)**

Fie  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $b$  este finit sau nu. Presupunem că  $f$  este continuă și că există  $M > 0$  astfel încât  $|F(u)| \leq M$ ,  $\forall a < u < b$ , unde am notat cu

$F(u) = \int_a^u f(x) dx$ . Despre funcția  $g$  presupunem că este monoton descrescătoare, de clasă  $C^1$  și nenegativă pe  $[a, b)$ . În plus  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ . Atunci  $\int_a^b f(x)g(x) dx$  este convergentă.

*Demonstrație.*

Demonstrația se bazează pe Teorema 3.1.1. Pentru orice  $u', u'' \in (a, b)$  avem

$$\int_{u'}^{u''} f(x)g(x) dx = \int_{u'}^{u''} F'(x)g(x) dx = F(x)g(x) \Big|_{u'}^{u''} - \int_{u'}^{u''} F(x)g'(x) dx.$$

Pe de altă parte,  $g$  fiind descrescătoare rezultă că  $g'(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$  și, conform teoremei de medie există  $\xi$  în intervalul de capete  $u'$  și  $u''$  astfel încât

$$\int_{u'}^{u''} F(x)g'(x) dx = F(\xi) \int_{u'}^{u''} g'(x) dx = F(\xi)[g(u'') - g(u')]$$

Așadar, avem:  $\int_{u'}^{u''} f(x)g(x) dx = F(u'')g(u'') - F(u')g(u') - F(\xi)[g(u'') - g(u')]$ .

Ținând seama că  $|F(u)| \leq M$ ,  $\forall u \in (a, b)$  rezultă:

$$\left| \int_{u'}^{u''} f(x)g(x) dx \right| \leq 2M[g(u'') + g(u')].$$

Prin ipoteză  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ , deci pentru  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon < b$  astfel încât

$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$  pentru orice  $x \in (\delta_\varepsilon, b)$ . Așadar, dacă  $u'$  și  $u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ , rezultă că:

$\left| \int_{u'}^{u''} f(x)g(x)dx \right| \leq 2M \left( \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M} \right) = \varepsilon$ , deci  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  este convergentă conform Teoriei 3.1.1.

**Exemplul 3.1.8**  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  este convergentă.

Într-adevăr, fie  $f(x) = \sin x$  și  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in [1, \infty)$ . Constatăm imediat că funcțiile  $f$  și  $g$  satisfac condițiile Teoremei 3.1.5, deci  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  este convergentă.

**Observația 3.1.3** Fie  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , integrabilă pe  $[a, u]$ ,  $\forall a < u < b < \infty$ . Dacă există  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$  și e finită, atunci  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă.

Într-adevăr,  $\lim_{x \rightarrow b} (b-x)^{\frac{1}{2}} |f(x)| = 0$ , deci  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă în virtutea Teoremei 3.1.4. Așadar,  $\int_a^b f(x)dx$  este absolut convergentă, deci convergentă conform Corolarului 3.1.1.

**Exemplul 3.1.9** Integrala lui Dirichlet  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  este convergentă.

Într-adevăr,  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , rezultă că  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  este convergentă. Pe de altă parte, în Exemplul 3.1.8 am arătat că  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  este convergentă.

**Definiția 3.1.3** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , integrabilă pe fiecare interval compact  $[v, u] \subset \mathbb{R}$ . Spunem că  $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$  este convergentă dacă există  $\lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow -\infty}} \int_v^u f(x)dx$  și este finită. Se numește valoare principală (în sensul lui Cauchy) următoarea limită (v.p.)  $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u f(x)dx$ .

Se poate întâmpla ca o integrală  $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$  să fie divergentă, dar valoarea sa principală să fie finită.

**Exemplul 3.1.10**  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$ .

Deoarece  $\lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow -\infty}} \int_v^u \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow -\infty}} \frac{1}{2} \ln \frac{1+u^2}{1+v^2}$  nu există, rezultă că  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$

este divergentă. Pe de altă parte (v.p.)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u \frac{x dx}{1+x^2} = 0$ .

În mod asemănător, dacă  $f: [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , spunem că  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă dacă există  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0_+ \\ \eta \rightarrow 0_+}} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\eta}^b f(x) dx \right)$  și e finită. De asemenea notăm cu (v.p.)  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$  și o numim valoarea principală în sensul lui Cauchy.

**Exemplul 3.1.11**  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  este divergentă deoarece

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0_+ \\ \eta \rightarrow 0_+}} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0_+ \\ \eta \rightarrow 0_+}} \ln \frac{\varepsilon}{\eta} \text{ nu există.}$$

Pe de altă parte

$$(\text{v.p.}) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon) = 0.$$

Următoarea teoremă este cunoscută sub numele de teorema schimbării de variabilă pentru integrale generalizate.

**Teorema 3.1.8** Fie  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continuă și fie  $\varphi: [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$  o funcție de clasă  $C^1$ , strict crescătoare astfel încât  $\varphi(\alpha) = a$  și  $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = b$ . Atunci, dacă

una din integralele:  $\int_a^b f(x) dx$ , respectiv  $\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$  este convergentă, atunci și cealaltă este convergentă și are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

*Demonstrație.*

Fie  $a < u < b$ . Deoarece  $\varphi$  este strict crescătoare și continuă, rezultă că  $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$  este bijectivă, deci  $\exists \alpha < \tau < \beta$  astfel încât  $\varphi(\tau) = u$ . Din Teorema schimbării de variabilă pe un interval compact avem:

$$\int_a^u f(x) dx = \int_{\alpha}^{\tau} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Să presupunem, de exemplu, că  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă. Atunci rezultă

$$\text{că } \exists \lim_{\tau \nearrow \beta} \int_{\alpha}^{\tau} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \lim_{u \nearrow b} \int_a^u f(x) dx = (v) \int_a^b f(x) dx < \infty. \text{ Așadar,}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \text{ este convergentă și } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

### 3.2. INTEGRALE CU PARAMETRU

Fie  $D = [a, b] \times [c, d]$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă pentru orice  $t \in [c, d]$ , funcția  $x \rightarrow f(x, t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci  $\int_a^b f(x, t) dx$  va depinde de  $t$ . Se poate defini astfel o funcție  $F : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  astfel:

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx, \forall t \in [c, d].$$

Se poate considera o situație mai generală, în care parametrul  $t$  intervine și în limitele integralei. Mai precis avem:

**Definiția 3.2.1** Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $\alpha, \beta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ . Dacă pentru orice  $t \in [c, d]$ , funcția  $x \rightarrow f(x, t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă, atunci funcția  $F : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx, \forall t \in [c, d] \quad (1)$$

se numește *integrală cu parametru*.

În continuare, vom analiza în ce condiții funcția  $F$  este continuă, derivabilă, integrabilă etc.

**Teorema 3.2.1** Dacă  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $\alpha, \beta : [c, d] \rightarrow [a, b]$  sunt continue, atunci  $F : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx, \forall t \in [c, d]$  este continuă pe  $[c, d]$ .

*Demonstrație.*

Fie  $t_0 \in [c, d]$  un punct oarecare fixat.

Să evaluăm diferența  $F(t) - F(t_0) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx - \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x, t_0) dx$ .

Ținând seama de descompunerea  $\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} = \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t_0)} + \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} + \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)}$  avem:

$$F(t) - F(t_0) = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} [f(x, t) - f(x, t_0)] dx + \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x, t) dx - \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t_0)} f(x, t) dx \quad (2)$$

Deoarece  $f$  este continuă pe mulțimea compactă  $D$ , rezultă că  $f$  este mărginită pe  $D$ , deci există  $M > 0$  astfel încât  $|f(x, t)| < M$ ,  $\forall (x, t) \in D$ .

În continuare avem:

$$|F(t) - F(t_0)| \leq \left| \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} [f(x, t) - f(x, t_0)] dx \right| + M |\beta(t) - \beta(t_0)| + M |\alpha(t) - \alpha(t_0)|.$$

Cum  $f$  este continuă pe mulțimea compactă  $D$ , rezultă că  $f$  este uniform continuă pe  $D$ , deci  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta'_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall (x', t') \in D$ ,  $\forall (x'', t'') \in D$  cu proprietatea  $|x' - x''| < \delta'_\varepsilon$ ,  $|t' - t''| < \delta'$  avem

$$|f(x', t') - f(x'', t'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad (3)$$

Pe de altă parte, din continuitatea funcțiilor  $\alpha$  și  $\beta$  rezultă că  $\exists \delta''_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall t \in [c, d]$  cu  $|t - t_0| < \delta''_\varepsilon$  avem:

$$|\alpha(t) - \alpha(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{și} \quad |\beta(t) - \beta(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad (4)$$

Fie  $\delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon; \delta''_\varepsilon)$  și fie  $t \in [c, d]$  cu  $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$ . Ținând seama de (3) și (4), rezultă:

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &\leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} |\beta(t_0) - \alpha(t_0)| + M \frac{\varepsilon}{3M} + M \frac{\varepsilon}{3M} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} (b-a) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Așadar, pentru  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât pentru orice  $t \in [c, d]$  cu  $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$  avem  $|F(t) - F(t_0)| < \varepsilon$ , deci  $F$  este continuă în  $t_0$ . Cum  $t_0$  a fost arbitrar în  $[c, d]$ , rezultă că  $F$  este continuă pe  $[c, d]$ .

**Observația 3.2.1** Concluzia Teoremei 3.2.1 se poate formula și astfel:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x, t_0) dx.$$

**Exemplul 3.2.1** Să se calculeze  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx$ .

Folosind Teorema 3.2.1 rezultă imediat că

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x \, dx = \int_0^2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} x^2 \cos \alpha x \, dx = \int_0^2 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

**Teorema 3.2.2** Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  continuă. Presupunem în plus că există  $\frac{\partial f}{\partial t}$  și  $e$  continuă pe  $D$ , iar funcțiile  $\alpha, \beta: [c, d] \rightarrow [a, b]$  sunt derivabile pe  $[c, d]$ . Atunci rezultă că funcția  $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) \, dx$ ,  $t \in [c, d]$  este derivabilă pe  $[c, d]$  și

$$F'(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx + \beta'(t)f[\beta(t), t] - \alpha'(t)f[\alpha(t), t] \quad (5)$$

(Formula (5) este cunoscută sub numele de formula lui Leibniz de derivare a integralei cu parametru).

*Demonstrație.*

Fie  $t_0 \in [c, d]$  fixat și  $t \in [c, d]$ ,  $t \neq t_0$ . Ținând seama de descompunerea (2) rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} &= \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} \, dx + \frac{1}{t - t_0} \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x, t) \, dx - \\ &\quad - \frac{1}{t - t_0} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(x, t) \, dx. \end{aligned}$$

Conform teoremei de medie există  $\xi$  între  $\beta(t_0)$  și  $\beta(t)$  și  $\eta$  între  $\alpha(t_0)$  și  $\alpha(t)$  astfel încât să avem:

$$\begin{aligned} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} &= \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} \, dx + f(\xi, t) \frac{\beta(t) - \beta(t_0)}{t - t_0} - \\ &\quad - f(\eta, t) \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, din Teorema Lagrange rezultă că există  $\theta$  în intervalul deschis de capete  $t_0$  și  $t$  astfel încât  $f(x, t) - f(x, t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta)(t - t_0)$ . Așadar,

avem:

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta) \, dx + f(\xi, t) \frac{\beta(t) - \beta(t_0)}{t - t_0} - f(\eta, t) \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}. \quad (6)$$

În continuare, ținând seama de Teorema 3.2.1 și de faptul că  $f$  și  $\frac{\partial f}{\partial t}$  sunt continue pe  $D$ , iar  $\alpha$  și  $\beta$  sunt derivabile pe  $[c, d]$ , rezultă că membrul drept al egalității (6) are limită, deci  $\exists$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx + \beta'(t_0) f[\beta(t_0), t_0] - \alpha'(t_0) f[\alpha(t_0), t_0].$$

Așadar,  $F$  este derivabilă în punctul  $t_0$  și

$$F'(t_0) = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx + \beta'(t_0) f[\beta(t_0), t_0] - \alpha'(t_0) f[\alpha(t_0), t_0].$$

Cum  $t_0$  a fost arbitrar, rezultă că  $F$  este derivabilă pe  $[c, d]$  și are loc formula (5).

**Exemplul 3.2.2** Fie integralele eliptice:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \text{și} \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad 0 < k < 1.$$

Să se arate că  $\frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}$  și  $\frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1 - k^2)} - \frac{K}{k}$ . Verificăm prima egalitate.

Într-adevăr, din Teorema 3.2.2 rezultă că

$$\begin{aligned} \frac{dE(k)}{dk} &= \int_0^{\pi/2} \frac{-k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - k^2 \sin^2 \varphi - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{E(k) - K(k)}{k}, \quad 0 < k < 1. \end{aligned}$$

**Exemplul 3.2.3** Să se arate că funcția  $y(x) = \int_0^\pi \cos(n\alpha - x \sin \alpha) d\alpha$ ,  $x \in \mathbb{R}$  verifică ecuația lui Bessel:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (7)$$

Într-adevăr, din Teorema 3.2.2 avem:

$$y'(x) = \int_0^\pi \sin \alpha \cdot \sin(n\alpha - x \sin \alpha) d\alpha \quad \text{și}$$

$$y''(x) = \int_0^\pi -\sin^2 \alpha \cdot \cos(n\alpha - x \sin \alpha) d\alpha.$$

Înlocuind în ecuația (7) obținem:

$$\int_0^\pi \left[ (-x^2 \sin^2 \alpha + x^2 - n^2) \cos(n\alpha - x \sin \alpha) + x \sin \alpha \cdot \sin(n\alpha - x \sin \alpha) \right] d\alpha =$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \left[ (x^2 \cos^2 \alpha - n^2) \cos(n\alpha - x \sin \alpha) + x \sin \alpha \cdot \sin(n\alpha - x \sin \alpha) \right] d\alpha = \\
&= - \int_0^\pi \left[ (n + x \cos \alpha) \sin(n\alpha - x \sin \alpha) \right]' d\alpha = (n + x \cos \alpha) \sin(n\alpha - x \sin \alpha) \Big|_0^\pi = 0.
\end{aligned}$$

**Exemplul 3.2.4** Să se calculeze  $F(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) dx$ ,  $\alpha > 1$ .  
 Funcția  $f(x, \alpha) = \ln(\alpha^2 - \sin^2 x)$ ,  $x \in [0, \pi/2] \times (1, \infty)$  satisface condițiile Teoremei 3.2.2 pe orice mulțime compactă  $D = [0, \pi/2] \times [c, d] \subset [0, \pi/2] \times (1, \infty)$ . Rezultă că avem:

$$F'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 x} dx, \quad \forall \alpha > 1.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă  $\operatorname{tg} x = t$  rezultă:

$$\begin{aligned}
F'(\alpha) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha dx}{\alpha^2 - \sin^2 x} = \int_0^\infty \frac{2\alpha dt}{\left(\alpha^2 - \frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}} = \\
&= \frac{2}{\alpha^2 - 1} \cdot \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} t \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}.
\end{aligned}$$

Așadar, avem:  $F(\alpha) = \pi \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) + C$ ,  $\alpha > 1$ .

Pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned}
C &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[ \int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) dx - \pi \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \right] = \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[ \int_0^{\pi/2} \ln \alpha^2 \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\alpha^2} \right) dx - \pi \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \right] = \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[ \int_0^{\pi/2} \left( 2 \ln \alpha + \ln \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\alpha^2} \right) \right) dx - \pi \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \right] = \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \pi \ln \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \ln \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\alpha^2} \right) dx = \pi \ln \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

În final avem:  $\int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) dx = \pi \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2}$ ,  $\forall \alpha > 1$ .

**Teorema 3.2.3** Dacă  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow Y$  este continuă, atunci funcția  $F: [c, d] \rightarrow Y$ ,  $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ ,  $t \in [c, d]$ , este continuă pe  $[c, d]$  și

$$\int_c^d F(t) dt = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx,$$

relație echivalentă cu  $\int_c^d \left( \int_a^b f(x, t) dx \right) dt = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx$ .

*Demonstrație.*

Pentru orice  $u \in [a, b]$  notăm cu

$$g(u, t) = \int_a^u f(x, t) dx \quad \text{și} \quad G(u) = \int_c^d g(u, t) dt$$

$$h(x) = \int_c^d f(x, t) dt \quad \text{și} \quad H(u) = \int_a^u h(x) dx.$$

Din Teorema 3.2.2, funcțiile  $g(u, t)$  și  $\frac{\partial g}{\partial u} = f$  fiind continue, rezultă

$$G'(u) = \int_c^d \frac{\partial g}{\partial u}(u, t) dt = \int_c^d f(u, t) dt \quad \text{și} \quad H'(u) = h(u) = \int_c^d f(u, t) dt. \quad \text{Așadar,}$$

$G'(u) = H'(u)$ ,  $\forall u \in [a, b]$ . Rezultă că cele două funcții diferă printr-o constantă, deci există  $c \in Y$  astfel încât

$$G(u) = H(u) + c, \quad \forall u \in [a, b].$$

Deoarece  $G(a) = H(a) = 0$ , rezultă că  $c = 0$ , deci  $G(u) = H(u)$ ,  $\forall u \in [a, b]$ .

În particular, pentru  $u = b$  avem:  $G(b) = H(b)$  adică

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, t) dx \right) dt = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx.$$

### 3.3. INTEGRALE GENERALIZATE CU PARAMETRU

**Definiția 3.3.1** Fie  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow Y$ ,  $b$  finit sau nu. Dacă pentru orice  $t \in [c, d]$ ,  $\int_a^b f(x, t) dx$  este convergentă, spunem că  $\int_a^b f(x, t) dx$  este punctual (simplu) convergentă pe intervalul  $[c, d]$ .

Ținând seama de Teorema 3.1.1 rezultă:

**Observația 3.3.1** Fie  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow Y$ ,  $b$  finit sau nu. Atunci

$\int_a^b f(x, t) dx$  este punctual convergentă pe  $[c, d]$  dacă și numai dacă  $\forall t \in [c, d]$  și

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a < \delta_{t, \varepsilon} < b \text{ astfel încât } \forall u', u'' \in (\delta_{t, \varepsilon}, b) \text{ avem } \left| \int_{u'}^{u''} f(x, t) dx \right| < \varepsilon.$$

Există și un alt tip de convergență, cu proprietăți mai bune decât convergența punctuală, în care  $\delta$  depinde numai de  $\varepsilon$  și nu depinde de  $t$ . Acest tip de convergență se numește convergență uniformă. Mai precis avem:

**Definiția 3.3.2** Fie  $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b$  finit sau nu. Spunem că  $\int_a^b f(x, t) dx$  este uniform convergentă pe  $[c, d]$ , dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists a < \delta_\varepsilon < b$  astfel încât,  $\forall u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$  și  $\forall t \in [c, d]$  avem  $\left| \int_{u'}^{u''} f(x, t) dx \right| < \varepsilon$ .

Din Definiția 3.3.2 și Observația 3.3.1 rezultă imediat că:

**Observația 3.3.2** Convergența uniformă implică convergența punctuală.

**Teorema 3.3.1** Fie  $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b$  finit sau nu.

Dacă  $\exists \varphi : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$  cu proprietățile:

- 1)  $|f(x, t)| \leq \varphi(x), \forall (x, t) \in [a, b) \times [c, d]$ .
- 2)  $\int_a^b \varphi(x) dx$  este convergentă, atunci  $\int_a^b f(x, t) dx$  este uniform convergentă pe  $[c, d]$ .

*Demonstrație.*

Deoarece  $\int_a^b \varphi(x) dx$  este convergentă, rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists a < \delta_\varepsilon < b$  astfel încât  $\left| \int_{u'}^{u''} \varphi(x) dx \right| < \varepsilon, \forall u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ .

Cum  $\left| \int_{u'}^{u''} f(x, t) dx \right| \leq \left| \int_{u'}^{u''} |f(x, t)| dx \right| \leq \left| \int_{u'}^{u''} \varphi(x) dx \right| < \varepsilon$ , pentru orice  $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$  și  $\forall t \in [c, d]$ , rezultă că  $\int_a^b f(x, t) dx$  este uniform convergentă pe  $[c, d]$ .

**Exemplul 3.3.1**  $\int_0^\infty e^{-x} \sin t dx, t \in \mathbb{R}$  este uniform convergentă pe  $\mathbb{R}$ .

Într-adevăr,  $|e^{-x} \sin t x| \leq e^{-x}, \forall x \in [0, \infty)$  și  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Cum

$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-x} dx = 1$ , este convergentă, rezultă că  $\int_0^\infty e^{-x} \sin t x dx$  este

uniform convergentă pe  $Y$ .

În continuare, prezentăm fără demonstrație, un alt criteriu de convergență uniformă.

**Teorema 3.3.2 (Abel-Dirichlet)**

Fie  $f, g : [a, b) \times [c, d] \rightarrow Y$ . Considerăm următoarele condiții:

$(\alpha_1)$   $\exists M > 0$  astfel încât  $\left| \int_a^u f(x, t) dx \right| < M, \forall a < u < b, \forall t \in [c, d]$ .

$(\beta_1)$  Pentru orice  $t \in [c, d]$ , funcția  $x \rightarrow g(x, t) : [a, b) \rightarrow Y$  este monotonă și  $\lim_{x \rightarrow b} g(x, t) = 0$ , uniform în raport cu  $t$  (adică,  $\forall \varepsilon > 0, \exists a < \delta_\varepsilon < b$  astfel încât  $|g(x, t)| < \varepsilon, \forall x \in (\delta_\varepsilon, b)$  și  $\forall t \in [c, d]$ ).

$(\alpha_2)$   $\int_a^b f(x, t) dx$  este uniform convergentă pe  $[c, d]$ .

$(\beta_2)$  Pentru orice  $t \in [c, d]$ , funcția  $x \rightarrow g(x, t) : [a, b) \rightarrow Y$  este monotonă și  $\exists M > 0$  astfel încât  $|g(x, t)| < M, \forall x \in [a, b)$  și  $\forall t \in [c, d]$ .

Atunci, dacă sunt îndeplinite condițiile  $(\alpha_1)$  și  $(\beta_1)$ , respectiv  $(\alpha_2)$  și  $(\beta_2)$ , rezultă că  $\int_a^b f(x, t) g(x, t) dx$  este uniform convergentă pe  $[c, d]$ .

**Exemplul 3.3.2**  $\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$  este uniform convergentă pe  $[0, \infty)$ . Fie

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ și } g(x, t) = e^{-tx}, x \in [0, \infty), t \in [0, \infty). \text{ Deoarece}$$

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  este convergentă (Vezi Exemplul 3.1.9) și nu depinde de  $t$ , rezultă că

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  este uniform convergentă pe  $[0, \infty)$ .

Pe de altă parte,  $|g(x, t)| = e^{-tx} \leq 1, \forall x \in [0, \infty), \forall t \in [0, \infty)$  deci  $g$  satisface condiția  $(\beta_2)$ . Din Teorema 3.3.2 rezultă că  $\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$  este uniform convergentă pe  $[0, \infty)$ .

**Lema 3.3.1** Fie  $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow Y$ , fie  $\{b_n\}$  cu  $a < b_n < b$  un șir cu proprietatea că  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  și fie  $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x, t) dx, t \in [c, d]$ . Dacă

$\int_a^b f(x, t) dx$  este uniform convergentă pe  $[c, d]$ , atunci șirul de funcții  $\{F_n\}$  converge uniform pe  $[c, d]$  la funcția  $F$ , unde

$$F(t) = (v) \int_a^b f(x, t) dx = \lim_{u \rightarrow b} \int_a^u f(x, t) dx, \forall t \in [c, d].$$

*Demonstrație.*

Deoarece  $\int_a^b f(x, t) dx$  este uniform convergentă pe  $[c, d]$  rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$\exists a < \delta_\varepsilon < b$  astfel încât pentru orice  $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$  și  $\forall t \in [c, d]$  avem

$$\left| \int_{u'}^{u''} f(x, t) dx \right| < \varepsilon \quad (1)$$

Cum  $b_n \rightarrow b$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $b_n \in (\delta_\varepsilon, b)$  pentru orice  $n \geq n_\varepsilon$ . Dacă presupunem acum că  $n \geq n_\varepsilon$  și  $m \geq n_\varepsilon$ , din (1) rezultă că:

$$|F_n(t) - F_m(t)| = \left| \int_{b_n}^{b_m} f(x, t) dx \right| < \varepsilon \quad (2)$$

Așadar, șirul  $\{F_n\}$  este uniform fundamental, deci uniform convergent pe  $[c, d]$ . Pe de altă parte, este evident că pentru orice  $t \in [c, d]$  avem

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^{b_m} f(x, t) dx = F(t).$$

Trecând la limită în (2) după  $m \rightarrow \infty$  obținem

$$|F_n(t) - F(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [c, d], \text{ deci } F_n \xrightarrow{u} F \text{ pe } [c, d].$$

**Teorema 3.3.3** Dacă  $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow Y$  este continuă, și dacă  $\int_a^b f(x, t) dx$  este uniform convergentă pe  $[c, d]$ , atunci funcția  $F : [c, d] \rightarrow Y$ , definită prin  $F(t) = (v) \int_a^b f(x, t) dx, \forall t \in [c, d]$ , este continuă pe  $[c, d]$ .

*Demonstrație.*

Fie  $a < b_n < b$ ,  $b_n \rightarrow b$  și fie  $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x, t) dx, t \in [c, d]$ . Din Teorema 3.1.1 rezultă că  $F_n$  este continuă pe  $[c, d]$ ,  $\forall n$ . Pe de altă parte, Lema 3.3.1 implică faptul că  $F_n \xrightarrow{u} F$  pe  $[c, d]$ . Din Teorema referitoare la continuitatea limitei unui șir de funcții (vezi [9] Teorema 2.1.2) rezultă că  $F$  este continuă pe  $[c, d]$ .

**Teorema 3.3.4** Fie  $D = [a, b) \times [c, d]$  și  $f : D \rightarrow Y$ , cu proprietățile:

- (i)  $f$  și  $\frac{\partial f}{\partial t}$  sunt continue pe  $D$ .
- (ii)  $\int_a^b f(x, t) dx$  este punctual convergentă pe  $[c, d]$ .
- (iii)  $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$  este uniform convergentă pe  $[c, d]$ .

Atunci, funcția  $F : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $F(t) = (v) \int_a^b f(x, t) dx$ ,

$\forall t \in [c, d]$ , este derivabilă pe  $[c, d]$  și  $F'(t) = (v) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$ ,  $\forall t \in [c, d]$ .

*Demonstrație.*

Fie  $a < b_n < b$ ,  $b_n \rightarrow b$  și fie  $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x, t) dx$ ,  $t \in [c, d]$ . Este evident că șirul  $\{F_n\}$  converge punctual pe  $[c, d]$  la funcția  $F$ . Pe de altă parte, din Teorema 3.1.2 rezultă că  $F_n$  este derivabilă pe  $[c, d]$  și  $F'_n(t) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$ .

Observăm de asemenea, că dacă notăm cu  $G(t) = (v) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$ ,  $\forall t \in [c, d]$ , atunci din Lema 3.3.1 rezultă că  $F'_n \xrightarrow{u} G$  pe  $[c, d]$ . Conform teoremei de derivabilitate a limitei unui șir de funcții ([9] teorema 2.1.4) rezultă că  $F$  este derivabilă și  $F'(t) = G(t)$ ,  $\forall t \in [c, d]$  și cu aceasta, teorema este demonstrată.

**Exemplul 3.3.3** Să se calculeze integrala lui Dirichlet:  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ .

Fie  $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $t \in [0, \infty)$ .

Așa cum am văzut în Exemplul 3.3.2  $\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$  este uniform convergentă pe  $[0, \infty)$ . Cum funcția de sub integrală este continuă, din Teorema 3.3.3 rezultă că  $F$  este continuă pe  $[0, \infty)$ , deci  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = F(0) = \lim_{t \rightarrow 0} F(t)$ .

Pe de altă parte, avem:  $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \right) dx = - \int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx$ . Fie  $a > 0$  oarecare. Deoarece  $|e^{-tx} \sin x| \leq e^{-ax}$ ,  $\forall x \in [0, \infty)$  și  $\int_0^\infty e^{-ax} dx$  este convergentă, rezultă că  $- \int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx$  este uniform convergentă pe  $[a, \infty]$ ,  $\forall a > 0$ .

Din Teorema 3.3.4 rezultă că pentru orice  $t > 0$  avem

$$\begin{aligned}
 F'(t) &= -\int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, dx = \frac{e^{-tx} \sin x}{t} \Big|_0^\infty - \frac{1}{t} \int_0^\infty e^{-tx} \cos x \, dx = \\
 &= -\frac{1}{t} \left( -\frac{\cos x e^{-tx}}{t} \Big|_0^\infty - \frac{1}{t} \int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, dx \right) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} \int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, dx.
 \end{aligned}$$

Mai departe avem  $\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) F'(t) = -\frac{1}{t^2}$ , deci  $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ ,  $t > 0$ . Așadar,

$$F(t) = -\arctg t + C, \quad \forall t > 0 \quad (3)$$

Pe de altă parte,  $|F(t)| \leq \int_0^\infty e^{-tx} \, dx = \frac{1}{t}$ ,  $\forall t > 0$ , deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0. \quad (4)$$

Din (3) și (4) deducem  $0 = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = -\frac{\pi}{2} + C$ , deci  $C = \frac{\pi}{2}$ . Folosind din nou (3) obținem  $F(0) = C$ .

Cum  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = F(0)$  deducem că  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$ .

**Teorema 3.3.5** Fie  $f: [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{Y}$ , continuă. Dacă  $\int_a^b f(x, t) \, dx$  este uniform convergentă pe  $[c, d]$ , atunci funcția  $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{Y}$ , definită prin  $F(t) = (v) \int_a^b f(x, t) \, dx$ ,  $t \in [c, d]$  este continuă (deci integrabilă) pe  $[c, d]$  și

$$\int_c^d F(t) \, dt = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, t) \, dt \right) \, dx,$$

relație echivalentă cu

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, t) \, dx \right) \, dt = (v) \int_a^b \left( \int_c^d f(x, t) \, dt \right) \, dx.$$

*Demonstrație.*

Fie  $a < b_n < b$ ,  $b_n \rightarrow b$  și fie  $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x, t) \, dx$ ,  $t \in [c, d]$ . Din Teorema 3.2.3 rezultă că  $\int_c^d F_n(t) \, dt = \int_a^{b_n} \left( \int_c^d f(x, t) \, dt \right) \, dx$ . Pe de altă parte, din Lema 3.3.1, rezultă că  $F_n \xrightarrow{u} F$  pe  $[c, d]$ , de unde deducem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d F_n(t) \, dt = \int_c^d F(t) \, dt$ . Așadar, avem:

$$\int_c^d F(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d F_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx.$$

Rezultă că  $\exists \lim_{\substack{u \rightarrow b \\ u < b}} \int_a^u \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_c^d f(t) dt$  (finită), deci

$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx$  este convergentă și

$$(v) \int_a^b \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_c^d F_n(t) dt = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$$

### 3.4. INTEGRALELE LUI EULER

**Definiția 3.4.1** Se numește funcția **beta** sau **integrala lui Euler de prima speță**, următoarea integrală generalizată cu parametri :

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad a > 0, b > 0. \quad (1)$$

Se observă că dacă  $a < 1$ , funcția de sub integrală nu este definită în 0 și nu este mărginită pe  $(0, 1]$ , iar dacă  $b < 1$ , atunci această funcție nu e definită în 1 și nu e mărginită pe  $[0, 1)$ .

Pentru început, vom arăta că integrala (1) este convergentă pentru  $a > 0$  și  $b > 0$ . Pentru aceasta vom descompune integrala în suma a două integrale  $\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$ . Dacă  $a \geq 1$ , atunci  $\int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$  este o integrală obișnuită

deoarece funcția de sub integrală este continuă pe  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ , deci nu se pune problema convergenței.

Dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $1-a < 1$  și deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^{1-a} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \right] = 1$ , din Teorema 3.1.5 rezultă că  $\int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$  este convergentă. Dacă  $b \geq 1$ , atunci  $\int_{1/2}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$  este o integrală obișnuită, deci nu se pune problema convergenței.

Dacă  $0 < b < 1$ , atunci  $1-b < 1$  și deoarece

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ (1-x)^{1-b} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \right] = 1,$$

din Teorema 3.1.4, rezultă că  $\int_{1/2}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$  este convergentă. Așadar, funcția  $B$  este convergentă pentru orice  $a > 0$  și orice  $b > 0$ .



**Teorema 3.4.1** Funcția beta are următoarele proprietăți:

(i)  $B(a, b) = B(b, a)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

(ii) Dacă  $a > 1$ , atunci are loc următoarea relație de recurență:

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b). \quad (2)$$

În particular, pentru  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \geq 2$  avem

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad (3)$$

$$(iii) \quad B(a, b) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt \quad (4)$$

*Demonstrație.*

Afirmația (i) rezultă imediat, dacă facem schimbarea de variabilă  $x = 1 - t$ .

Integrând prin părți, pentru  $a > 1$  și  $b > 0$  avem:

$$\begin{aligned} B(a, b) &= -\frac{1}{b} x^{a-1} (1-x)^b \Big|_0^1 + \frac{a-1}{b} \int_0^1 x^{a-2} (1-x)^b dx = \\ &= \frac{a-1}{b} \int_0^1 x^{a-2} [(1-x)^{b-1} - (1-x)^{b-1} x] dx = \frac{a-1}{b} B(a-1, b) - \frac{a-1}{b} B(a, b). \end{aligned}$$

Mai departe avem:

$$\left(1 + \frac{a-1}{b}\right) B(a, b) = \frac{a-1}{b} B(a-1, b) \quad \text{sau} \quad B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b).$$

În mod asemănător se arată că dacă  $b > 1$ , atunci

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a, b-1).$$

Deoarece  $B(a, 1) = \frac{1}{a}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  rezultă:

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{n-(n-1)}{a+n-(n-1)} B(a, 1) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)};$$

$$\text{În particular, pentru } m, n \in \mathbb{N}^*, m > 1 \text{ avem: } B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

(iii) Considerăm schimbarea de variabilă  $x = \frac{t}{1+t}$  și obținem

$$B(a, b) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a-1} (1+t)^{b-1}} \cdot \frac{dt}{(1+t)^2} = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt.$$

**Definiția 3.4.2** Se numește funcția **gama**, sau **funcția lui Euler de speța a doua**, următoarea integrală generalizată cu parametru :

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx, \quad a > 0. \quad (5)$$

Pentru a arăta că integrala (5) este convergentă, pentru orice  $a > 0$ , descompunem integrala în suma a două integrale:  $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$ .

Dacă  $a \geq 1$ ,  $\int_0^1 e^{-x} x^{a-1} dx$  este o integrală obișnuită, deoarece funcția de sub integrală este continuă pe  $[0, 1]$ , deci nu se pune problema convergenței.

Dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $1 - a < 1$  și deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{1-a} e^{-x} x^{a-1}) = 1$ , din Teorema 3.1.5, rezultă că  $\int_0^1 e^{-x} x^{a-1} dx$  este convergentă.

Pe de altă parte, observăm că  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 e^{-x} x^{a-1}) = 0$ . Din Teorema 3.1.4, rezultă că  $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$  este convergentă. Așadar,  $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$  este convergentă, pentru orice  $a > 0$ .

**Teorema 3.4.2** Funcția  $\Gamma$  are următoarele proprietăți:

- (i)  $\Gamma(1) = 1$
- (ii)  $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ ,  $a > 0$ . În particular  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $n \in \infty^*$ .
- (iii)  $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ ,  $a > 0, b > 0$ .

*Demonstrație.*

$$(i) \quad \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

$$(ii) \quad \Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^a dx = -e^{-x} x^a \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx = a\Gamma(a).$$

În particular, pentru  $n \in \infty^*$  avem:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)\dots 2\Gamma(1)$$

Cum  $\Gamma(1) = 1$ , rezultă  $\Gamma(n+1) = n!$

Așadar, observăm că funcția  $\Gamma$  generalizează funcția factorial, funcție care are sens numai pentru numere naturale.

(iii) Pentru început observăm că dacă facem schimbarea de variabilă  $x = ty$ ,  $t > 0$  obținem:

$$\Gamma(a) = t^a \int_0^{\infty} y^{a-1} e^{-ty} dy \quad (6)$$

Înlocuind în (6) pe  $a$  cu  $a+b$  și pe  $t$  cu  $t+1$  obținem:

$$\frac{\Gamma(a+b) \cdot t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} = t^{a-1} \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Ținând seama acum de formula (4), deducem

$$\begin{aligned} \Gamma(a+b)B(a,b) &= \int_0^\infty \frac{\Gamma(a+b)t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^\infty \left( t^{a-1} \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right) dt = \\ &= \int_0^\infty \left( t^{a-1} \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt \right) dy = \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-y} \left( \int_0^\infty t^{a-1} e^{-ty} dt \right) dy. \end{aligned}$$

Ținând seama din nou de (6) rezultă:

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-y} \cdot \frac{1}{y^a} \Gamma(a) dy = \int_0^\infty y^{b-1} e^{-y} dy = \Gamma(a)\Gamma(b).$$

$$\text{Așadar, } B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

## CAPITOLUL 4

### INTEGRALE CURBILINII

#### 4.1. DRUMURI PARAMETRIZATE

**Definiția 4.1.1** Prin drum parametrizat în  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$  se înțelege orice funcție vectorială continuă definită pe un interval  $I$  din  $\mathbb{R}$  cu valori în  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$ . Dacă notăm cu  $x, y$  și  $z$  componentele scalare ale lui  $r$ , atunci  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $\forall t \in I$ .

Ecuatiile  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in I$  se numesc ecuațiile parametrice ale drumului  $r$ , sau o reprezentare a drumului, iar  $t$  se numește parametru. Imaginea directă  $r(I)$  a intervalului  $I$  prin funcția vectorială  $r$ , adică mulțimea  $\{(x(t), y(t), z(t)); t \in I\}$  se numește suportul (urma, hodograful, traiectoria) drumului  $r$ . Dacă  $I$  este un interval compact  $[a, b]$ , atunci suportul său este o mulțime compactă și conexă din  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$ . În acest caz, punctele  $r(a)$  și  $r(b)$  se numesc capetele (extremitățile) drumului. Dacă  $r(a) = r(b)$  drumul se numește închis.

**Exemplul 4.1.1** Fie drumul  $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definit prin:  
 $r(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Ecuatiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

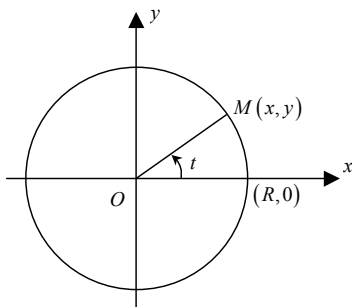


Fig. 1

Observăm că pentru orice  $t \in [0, 2\pi]$ , punctul  $(x(t), y(t))$  verifică ecuația

$x^2 + y^2 = R^2$ . Rezultă că suportul acestui drum este cercul cu centrul în origine și de rază  $R$ . Parametrul  $t$  are în acest caz o interpretare geometrică evidentă și anume, este unghiul dintre raza corespunzătoare punctului  $M(x, y)$  și direcția pozitivă a axei  $Ox$ , deoarece  $r(0) = r(2\pi) = (R, 0)$ , drumul este închis.

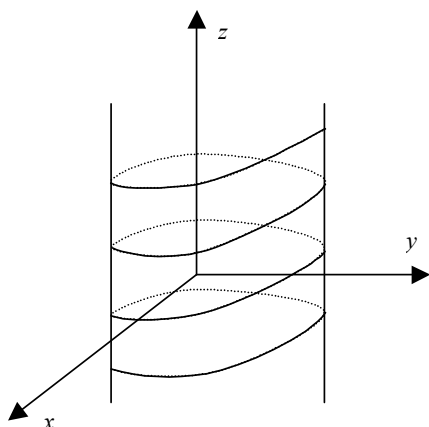


Fig. 2

**Exemplul 4.1.2** Fie drumul

$r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definit astfel:

$$r(t) = (R \cos t, R \sin t, ht), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ecuatiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ z = ht, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Suportul acestui drum este elicea circulară de pas  $h$ .

**Definiția 4.1.2** Dacă funcția vectorială  $r$  este injectivă, spunem că drumul este simplu (fără puncte multiple). În cazul unui drum închis,

acesta este simplu dacă egalitatea  $r(t_1) = r(t_2)$  implică sau  $t_1 = t_2$  sau cel puțin unul din numerele  $t_1$  și  $t_2$  este egal cu  $a$  și celălalt cu  $b$ , unde cu  $a$  și  $b$  am notat capetele intervalului  $I$ .

Drumurile prezentate în Exemplul 4.1.1. și 4.1.2 sunt simple. Un exemplu de drum care are puncte multiple este faliul lui Descartes:

**Exemplul 4.1.3** Considerăm ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suportul acestui drum este reprezentat în Fig. 3. Se observă că originea  $O$  este punct multiplu.

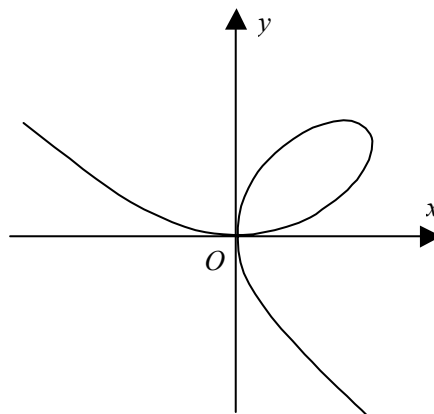


Fig. 3

**Definiția 4.1.3** Un drum  $r = (x, y, z) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  se numește neted dacă  $x, y, z$ , sunt de clasă  $C^1$  pe  $I$  și  $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0, \quad \forall \quad t \in I$ . Un astfel de drum are proprietatea că în orice punct al suportului său admite tangentă.

Un drum care nu este neted, se spune că are puncte singulare. Un punct  $t_0 \in I$  se numește singular dacă  $x'(t_0) = y'(t_0) = z'(t_0) = 0$ . Dacă  $t_0 \in I$  este un

punct singular, atunci în punctul  $M_0[x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$  de pe suport, tangenta nu este definită.

Un drum se consideră orientat în sensul creșterii parametrului.

**Definiția 4.1.4** Două drumuri  $r_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  și  $r_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se numesc echivalente și se notează acest lucru cu  $r_1 \sim r_2$ , dacă există o funcție  $\lambda: I_1 \rightarrow I_2$  bijectivă, strict monotonă, de clasă  $C^1$  cu  $\lambda'(t_1) \neq 0$ ,  $\forall t_1 \in I_1$ , astfel încât  $r_1(t_1) = r_2[\lambda(t_1)]$ ,  $\forall t_1 \in I_1$ .

O astfel de funcție  $\lambda$  se numește și schimbare de parametru. Din definiție rezultă că dacă  $\lambda$  este o schimbare de parametru, atunci  $\lambda'(t_1) > 0$ ,  $\forall t_1 \in I$  sau  $\lambda'(t_1) < 0$ ,  $\forall t_1 \in I$ .

Dacă  $\lambda' > 0$  pe  $I$ , deci  $\lambda$  este strict crescătoare, atunci spunem că drumurile  $r_1$  și  $r_2$  sunt echivalente cu aceeași orientare. În caz contrar, spunem că  $r_1$  și  $r_2$  sunt echivalente cu orientare schimbată.

Este evident că două drumuri echivalente au același suport.

**Exemplul 4.1.4** Fie drumurile  $r_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2$ , definite astfel:

$$r_1(t_1) = (R \sin t_1, R \cos t_1), \forall t_1 \in I_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ respectiv}$$

$$r_2(t_2) = \left(t_2, \sqrt{R^2 - t_2^2}\right), \forall t_2 \in I_2 = (0, R).$$

Aceste drumuri au același suport și anume arcul  $\overline{AB}$  al cercului cu centrul în origine și de rază  $R$ . (Fig. 4).

Observăm că funcția  $\lambda: I_1 \rightarrow I_2$  definită prin  $\lambda(t_1) = R \sin t_1$ ,  $\forall t_1 \in I_1$  este bijectivă, de clasă  $C^1$  și

$$\lambda'(t_1) = R \cos t_1 > 0, \forall t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Mai mult, observăm că

$$\begin{aligned} r_2(\lambda(t_1)) &= \left(\lambda(t_1), \sqrt{R^2 - \lambda^2(t_1)}\right) = \\ &= (R \sin t_1, R \cos t_1) = r_1(t_1), \forall t_1 \in I_1. \end{aligned}$$

Rezultă că  $\lambda$  este o schimbare de parametru și deci că cele două drumuri sunt echivalente cu aceeași orientare.

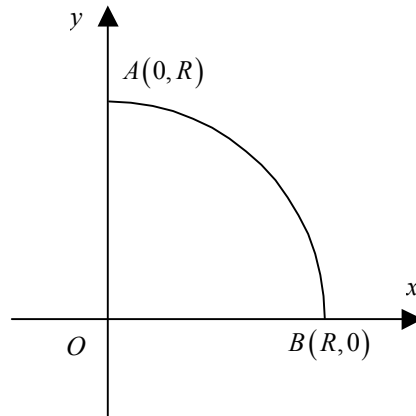


Fig. 4

Considerăm acum drumul  $r_3 : I_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $r_3(t_3) = (R \cos t_3, R \sin t_3)$ ,  
 $\forall t_3 \in I_3 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Observăm, ca mai sus, că funcția  $\mu : I_3 \rightarrow I_2$  definit prin  $\mu(t_3) = R \cos t_3$ ,  
 $\forall t_3 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  este o schimbare de parametru. Cum  $\mu'(t_3) = -R \sin t_3 < 0$ ,  
 $\forall t_3 \in I_3$ , rezultă că  $\mu$  este strict descrescătoare.

Drumurile  $r_3$  și  $r_2$  (respectiv  $r_3$  și  $r_1$ ) sunt echivalente cu orientări diferite. Orientarea drumurilor  $r_1$  și  $r_2$ , orientare dată de sensul creșterii parametrului, este de la  $A$  către  $B$ , în timp ce orientarea drumului  $r_3$  este de la  $B$  către  $A$ .

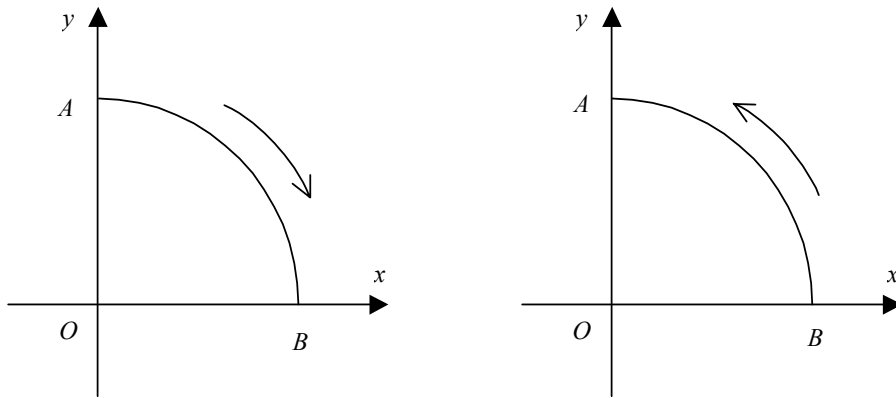


Fig. 5

**Definiția 4.1.5** Se numește curbă parametrizată orice clasă de drumuri parametrizate echivalente.

Așadar,  $\gamma$  este curbă parametrizată dacă există un drum parametrizat  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$  astfel încât:  $\gamma = \left\{ \rho : J \rightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2) \text{ drum parametrizat} \mid \rho \sim r \right\}$ .

Cum  $r \sim r$  rezultă că  $r \in \gamma$ .

O curbă parametrizată este simplă (închisă, netedă) dacă drumul care o determină este simplu (închis sau neted). O curbă simplă se consideră că este orientată pozitiv, dacă drumul care o definește este orientat în sensul creșterii parametrului și negativ în caz contrar.

Fie  $\gamma$  o curbă parametrizată simplă și netedă, și fie  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$  drumul parametrizat care o definește, orientat în sensul creșterii parametrului. Vom nota cu  $\gamma_+$  mulțimea tuturor drumurilor parametrizate echivalente cu  $r$  și care au aceeași

orientare cu  $r$ . Evident,  $r \in \gamma_+$ . Vom nota cu  $\gamma_-$  mulțimea tuturor drumurilor parametrizate echivalente cu  $r$  care au orientare opusă lui  $r$ .

Suportul unei curbe parametrizate  $\gamma$  este suportul drumului care o definește și evident, acesta coincide cu suportul oricărui reprezentant al curbei  $\gamma$ .

Fie  $\gamma$  curba parametrizată definită de drumul  $r_1$ . Suportul său este arcul  $\overline{AB}$  din Fig. 4. Suportul curbei  $\gamma_+$  este arcul  $\overline{AB}$  (orientat de la  $A$  către  $B$ ), în timp ce suportul curbei  $\gamma_-$  este arcul  $\overline{BA}$ . Evident  $r_2 \in \gamma_+$  și  $r_3 \in \gamma_-$ . În continuare, vom nota cu  $\{\gamma\}$  suportul curbei  $\gamma$ . De asemenea, ori de câte ori nu sunt prilejuri de confuzie, vom identifica o curbă cu unul din reprezentanții săi.

**Definiția 4.1.6** Fie  $r_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  și  $r_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^3$  două drumuri parametrizate cu proprietatea că  $r_1(b) = r_2(b)$ . Se numește *justapunerea drumurilor*  $r_1$  și  $r_2$  și se notează cu  $r_1 \cup r_2$  următorul drum:

$$(r_1 \cup r_2)(t) = \begin{cases} r_1(t) & \text{dacă } t \in [a, b] \\ r_2(t) & \text{dacă } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Dacă  $\gamma_i$  este curba definită de  $r_i$ ,  $i = 1, 2$ , atunci  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  este curba definită de drumul  $r_1 \cup r_2$ . O curbă se numește *netedă* pe porțiuni dacă este justapunerea unui număr finit de curbe netede.

## 4.2. CURBE RECTIFICABILE

Noțiunea de curbă (drum) introdusă în § 4.1 este destul de generală și de aceea, în anumite cazuri (în special în cazul curbelor care admit puncte multiple), suportul unei curbe poate să difere esențial față de imaginea intuitivă pe care o avem despre o curbă. Giuseppe Peano a arătat că se pot defini două funcții continue  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  pe intervalul  $[0, 1]$ , deci un drum, astfel încât, atunci când parametrul  $t$  parcurge intervalul  $[0, 1]$ , punctul corespunzător  $(x(t), y(t))$  pornește din punctul  $(0, 0)$  care corespunde valorii  $t = 0$ , trece prin toate punctele pătratului  $[0, 1] \times [0, 1]$  și ajunge în vârful  $(1, 1)$  care corespunde valorii  $t = 1$ . Cu alte cuvinte, suportul acestui drum umple un pătrat. Este clar că noțiunea de lungime pentru un asemenea drum nu are sens.

În cele ce urmează vom introduce noțiunea de drum rectificabil (care are lungime) și vom arăta cum se calculează lungimea unui drum rectificabil cu ajutorul integralei definite.

Fie  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  un drum și fie  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [a, b]$  ecuațiile sale parametrice. Considerăm o diviziune oarecare  $\Delta$  a intervalului  $[a, b]$ ,



$\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b$  și notăm cu  $M_i$  punctul de coordonate  $(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Fie  $L_\Delta(r) = \sum_{i=1}^n \|M_{i-1}M_i\|$  lungimea liniei poligonale

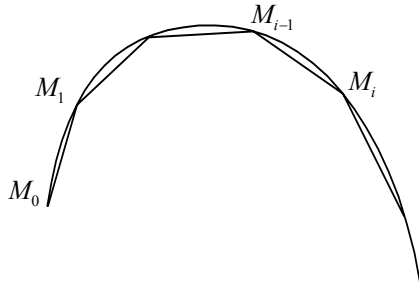


Fig. 6

obținută prin unirea suucisivă, prin segmente de dreaptă, a punctelor  $M_i$ .

Este evident că dacă  $\Delta' \prec \Delta''$ , atunci  $L_{\Delta'}(r) \leq L_{\Delta''}(r)$ .

Mulțimea  $\{L_\Delta(r)\}_\Delta$ , când  $\Delta$  parcurge toate diviziunile posibile ale intervalului  $[a, b]$  este o mulțime de numere pozitive, care poate fi mărginită superior sau nu.

**Definiția 4.2.1** Spunem că drumul  $r$  este rectificabil dacă mulțimea  $\{L_\Delta(r)\}_\Delta$  este majorată. Pentru un drum rectificabil se numește lungimea sa următorul număr:  $L(r) = \sup_\Delta \{L_\Delta(r)\}_\Delta < \infty$ .

**Lema 4.2.1** Pentru orice 4 numere reale  $a_1, a_2, b_1, b_2$ , are loc inegalitatea:

$$\left| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \right| \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \quad (1)$$

*Demonstrație.*

Amplificând cu conjugata și ținând seama de inegalitatea triunghiului obținem

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \right| &= \frac{|a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \leq \\ &\leq \frac{|a_1 - b_1||a_1 + b_1| + |a_2 - b_2||a_2 + b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

Pe de altă parte avem:  $|a_1 + b_1| \leq |a_1| + |b_1| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$  și analog  $|a_2 + b_2| \leq |a_2| + |b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ .

Ținând seama de aceste inegalități în (2) rezultă

$$\left| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \right| \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

**Observația 4.2.1** Inegalitatea (1) rămâne valabilă pentru orice  $2n$  numere reale  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . De exemplu pentru  $n = 3$  avem

$$\left| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \right| \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| \quad (3)$$

Demonstrația este practic aceeași cu demonstrația lemei.

**Teorema 4.2.1** Fie  $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  un drum parametrizat definit astfel:  
 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$ . Dacă  $r$  este neted, atunci  $r$  este rectificabil și lungimea sa este  $L(r) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$ .

*Demonstrație.*

Fie  $\Delta: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b$  o diviziune oarecare a intervalului  $[a, b]$ , și fie  $L_\Delta(r)$  lungimea liniei poligonale înscrise în suportul drumului  $r$ . Avem:

$$L_\Delta(r) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}.$$

Din teorema Lagrange rezultă că există  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  în intervalul deschis  $(t_{i-1}, t_i)$ , astfel încât

$$L_\Delta(r) = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\alpha_i) + y'^2(\beta_i) + z'^2(\gamma_i)} (t_i - t_{i-1}) \quad (4)$$

Funcția  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:  $g(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$ ,  $t \in [a, b]$ , este o funcție continuă, deoarece funcțiile  $x', y', z'$  sunt continue prin ipoteză.

Considerăm suma Riemann

$$\sigma_\Delta(g, \alpha) = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\alpha_i) + y'^2(\alpha_i) + z'^2(\alpha_i)} (t_i - t_{i-1}) \quad (5)$$

Deoarece  $g$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta'_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall \Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta'_\varepsilon$  și oricare ar fi punctele intermediare  $\alpha = (\alpha_i)$  avem

$$\left| \sigma_\Delta(g, \alpha) - \int_a^b g(t) dt \right| < \varepsilon \quad (6)$$

Pe de altă parte, din inegalitatea (3) și inegalitatea generalizată a triunghiului, rezultă:

$$|L_\Delta(r) - \sigma_\Delta(g, \varepsilon)| \leq \sum_{i=1}^n (|y'(\beta_i) - y'(\alpha_i)| + |z'(\gamma_i) - z'(\alpha_i)|)(t_i - t_{i-1}) \quad (7)$$

Cum  $y'$  și  $z'$  sunt uniform continue pe  $[a, b]$ , rezultă că există  $\delta''_\varepsilon > 0$  cu proprietatea că  $\forall t', t''$  în  $[a, b]$  cu distanța  $|t' - t''| < \delta''_\varepsilon$  avem

$$|y'(t') - y'(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ și } |z'(t') - z'(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (8)$$

Dacă alegem acum diviziunea  $\Delta$  astfel încât  $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon$ , atunci  $|\beta_i - \gamma_i| \leq t_i - t_{i-1} \leq \|\Delta\| < \delta''_\varepsilon$  și analog  $|\gamma_i - \alpha_i| < \delta''_\varepsilon$  și conform (8) avem

$$|y'(\beta_i) - y'(\alpha_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad |z'(\gamma_i) - z'(\alpha_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (9)$$

Ținând seama de (9) în (7) rezultă:

$$|L_\Delta(r) - \sigma_\Delta(g, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon.$$

Așadar, am demonstrat că  $\forall \Delta$  cu  $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon$  avem

$$|L_\Delta(r) - \sigma_\Delta(g, \alpha)| < \varepsilon \quad (10)$$

Cum  $g$  este mărginită pe  $[a, b]$ , rezultă că  $\sigma_\Delta(g, \alpha)$  este mărginită pentru orice  $\Delta$  și orice  $\alpha$  și, ținând seama de (10) că mulțimea  $\{L_\Delta(r)\}_\Delta$  este mărginită. Prin urmare am demonstrat că drumul  $r$  este rectificabil.

Fie  $L(r) = \sup_\Delta L_\Delta(r)$ . Din definiția marginii superioare rezultă că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  există o diviziune  $\Delta_n$  a intervalului  $[a, b]$  astfel încât

$$L(r) - \frac{1}{n} < L_{\Delta_n}(r) \leq L(r) \quad (11)$$

Mai mult, putem presupune că  $\|\Delta_n\| < \frac{1}{n}$ , pentru că în caz contrar, rafinăm această diviziune până obținem o diviziune  $\Delta'_n \succ \Delta_n$  cu această proprietate. Cum  $L_{\Delta'_n}(r) \geq L_{\Delta_n}(r)$  rezultă că  $L_{\Delta'_n}(r)$  satisface (11).

Considerăm acum o diviziune  $\Delta_n$  a intervalului  $[a, b]$  cu proprietatea  $\|\Delta_n\| < \min\left(\frac{1}{n}; \sigma'_\varepsilon; \sigma''_\varepsilon\right)$  și pentru care sunt adevărate inegalitățile (11). Din (6), (10) și (11) rezultă

$$\begin{aligned} \left| L(r) - \int_a^b g(t) dt \right| &\leq |L(r) - L_{\Delta_n}(r)| + |L_{\Delta_n}(r) - \sigma_{\Delta_n}(g, \alpha)| + \\ &\quad + \left| \sigma_{\Delta_n}(g, \alpha) - \int_a^b g(t) dt \right| < \frac{1}{n} + 2\varepsilon \end{aligned} \quad (12)$$

Cum inegalitatea (12) are loc pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  și orice  $\varepsilon > 0$  rezultă că

$$L(r) = \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

**Observația 4.2.2** Fie  $r$  un drum parametrizat în  $\mathbb{R}^2$  definit prin  $r(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ . Dacă  $r$  este neted, atunci  $r$  are lungime și aceasta este 
$$L(r) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

**Observația 4.2.3** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^1$ . Lungimea graficului acestei funcții este egală cu 
$$L(r) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Într-adevăr, funcția  $f$  definește un drum neted și anume  $r(t) = (t, f(t))$ ,  $t \in [a, b]$ . Graficul lui  $f$  coincide cu suportul acestui drum. Afirmația rezultă acum din Observația 4.2.2.

**Observația 4.2.4** Dacă  $r$  este un drum rectificabil, atunci orice alt drum echivalent cu  $r$  este rectificabil și are aceeași lungime ca  $r$ .

Într-adevăr, fie  $r_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2$  două drumuri echivalente și fie  $\lambda : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ , bijectivă, strict monotonă de clasă  $C^1$  cu proprietatea  $r_2[\lambda(t)] = r_1(t)$ ,  $\forall t \in [a_1, b_1]$ .

Dacă  $\Delta_1 = \{t_i\}$  este o diviziune oarecare a intervalului  $[a_1, b_1]$ , atunci  $\Delta_2 = \lambda(\Delta_1) = \{\lambda(t_i)\}$  este o diviziune a intervalului  $[a_2, b_2]$  și reciproc, orice diviziune  $\Delta_2$  a intervalului  $[a_2, b_2]$  este de acest tip. Cum  $L_{\Delta_1}(r_1) = L_{\Delta_2}(r_2)$  rezultă că 
$$L(r_1) = \sup_{\Delta_1} L_{\Delta_1}(r_1) = \sup_{\Delta_2} L_{\Delta_2}(r_2).$$

**Definiția 4.2.2** O curbă este rectificabilă dacă este o clasă de echivalență a unui drum rectificabil. Lungimea unei curbe rectificabile este lungimea oricărui drum din această clasă de echivalență.

**Exemplul 4.2.1** Lungimea cercului

O reprezentare parametrică a cercului este  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Conform Teoremei 4.2.1 avem:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

**Exemplul 4.2.2** Lungimea unei ramuri de cicloidă

Cicloida este curba parametrizată definită de drumul

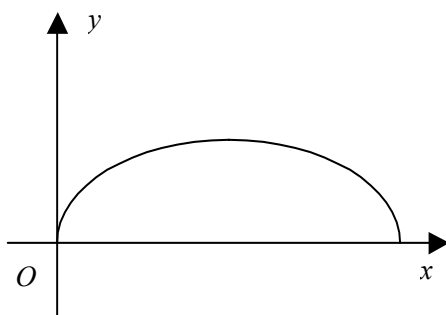


Fig. 7

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \\ t \in [0, \pi].$$

Observăm că

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 2a^2(1 - \cos t) = \\ = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}. \text{ Rezultă că}$$

$$L = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = \\ = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

#### Exemplul 4.2.3 Lungimea lăntişorului

Lăntişorul este graficul funcţiei

$$f(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad x \in [a, b].$$

Din Observaţia 4.2.3 deducem

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \\ = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \operatorname{sh} \frac{b}{a}.$$

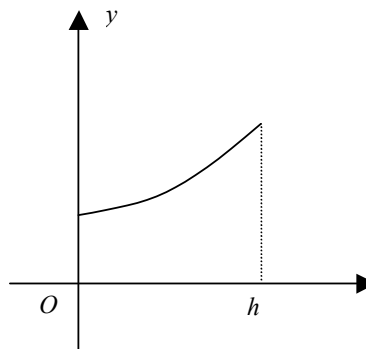


Fig. 8

#### Exemplul 4.2.4 Lungimea elipsei

O reprezentare parametrică a elipsei

de ecuaţie  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  este :  $x = a \sin t, y = b \cos t, t \in [0, 2\pi]$ .

Este suficient să calculăm un

sfert din lungimea elipsei. Avem:

$$\frac{L}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \\ = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt.$$

Dacă notăm cu  $c$  distanţa focală şi cu  $\varepsilon$  excentricitatea, atunci

$$a^2 - b^2 = c^2 \text{ şi } \varepsilon = \frac{c}{a} < 1.$$

În continuare rezultă

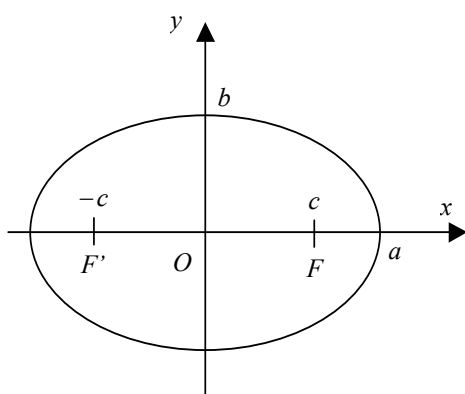


Fig. 9

$$\frac{L}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt, \text{ unde}$$

$0 < \varepsilon < 1$ . Suntem conduși astfel la calculul integralei:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Din păcate, primitiva acestei funcții nu este o funcție elementară și deci calculul acestei integrale nu se poate face cu formula Leibniz-Newton.

Încercarea de a calcula lungimea elipsei ne-a condus la o integrală ce nu poate fi calculată exact. O asemenea integrală se numește integrală eliptică.

Se cunosc următoarele tipuri de integrale eliptice:

a) Integrala eliptică de primul tip:

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \kappa \in (0,1)$$

b) Integrala eliptică de tipul doi:

$$E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \kappa \in (0,1)$$

c) Integrala eliptică de tipul trei:

$$F(\kappa, h) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}$$

,  $\kappa \in (0,1)$ .

Calculul acestor integrale se face cu metode aproximative și s-au întocmit tabele cu valorile lor (aproximative) pentru diferite valori ale parametrilor  $\kappa$ , respectiv  $\kappa$  și  $h$ .

**Observația 4.2.5** Fie  $\rho = \rho(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$  o funcție de clasă  $C^1$  și fie drumul  $r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definit de:  $r(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$ ,  $\forall \theta \in [\alpha, \beta]$ . Drumul  $r$  este rectificabil și lungimea sa este:

$$L(r) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta.$$

Într-adevăr, o reprezentare parametrică a drumului  $r$  este:

$$x = \rho(\theta) \cos \theta, \quad y = \rho(\theta) \sin \theta, \quad \theta \in [\alpha, \beta].$$

Suportul acestui drum este arcul  $\widehat{AB}$ , reprezentat în Fig. 10.

Conform Teoremei 4.2.1 avem:

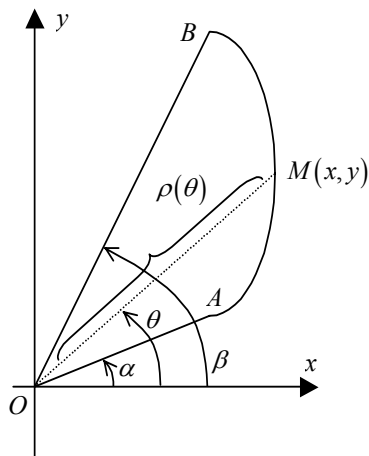


Fig. 10

$$L(r) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)^2 + \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta)} d\theta.$$

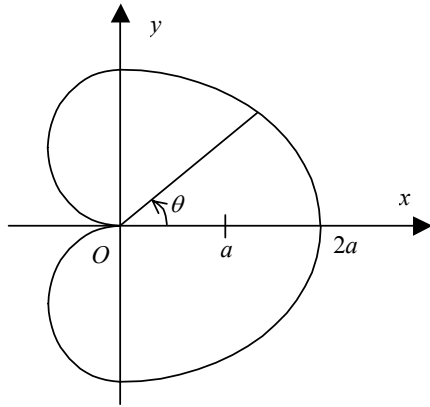


Fig. 11

#### Exemplul 4.2.5 Lungimea cardioidei

Fie  $\rho(\theta) = a(1 + \cos \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Suportul drumului determinat de această funcție este reprezentat în Fig. 11. Din motive de simetrie, este suficient să calculăm jumătate din lungimea acestui drum. Avem

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(a + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{2a^2(a + \cos \theta)} d\theta = \\ &= 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a. \end{aligned}$$

Așadar, lungimea cardioidei este  $L = 8a$ .

**Observația 4.2.6** Din Teorema 4.2.1 rezultă că dacă  $r_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  și  $r_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^3$  sunt două drumuri parametrizate netede și dacă  $r = r_1 \cup r_2$  este drumul obținut prin justapunerea lor, atunci  $r$  este rectificabil și

$$L(r) = L(r_1) + L(r_2).$$

Mai mult, orice curbă netedă pe porțiuni este rectificabilă și lungimea sa este suma lungimilor porțiunilor sale netede.

### 4.3. REPREZENTAREA NORMALĂ A UNEI CURBE RECTIFICABILE

Fie  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  un drum parametrizat neted, definit prin

$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Conform Teoremei 4.2.1 acest drum este rectificabil și lungimea sa este:

$$L = L(r) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Pentru orice  $t \in [a, b]$  notăm cu

$$s = \lambda(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)} du.$$

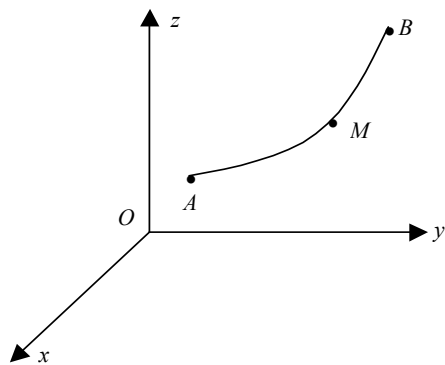


Fig. 12

Dacă  $M$  este punctul de coordonate  $(x(t), y(t), z(t))$ , atunci  $s = \lambda(t)$  reprezintă lungimea arcului  $\overline{AM}$ .

Deoarece  $\lambda'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} > 0$ ,  $\forall t \in [a, b]$ ,  $\lambda(a) = 0$  și  $\lambda(b) = L$ , rezultă că  $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, L]$  este o funcție de clasă  $C^1$ , strict crescătoare și bijectivă. Inversa sa  $\lambda^{-1} : [0, L] \rightarrow [a, b]$  este de asemenea de clasă  $C^1$ .

Considerăm funcția vectorială  $\rho : [0, L] \rightarrow Y^3$  definită prin

$$\rho(s) = r[\lambda^{-1}(s)], \quad s \in [0, L].$$

Este clar că drumurile  $r$  și  $\rho$  sunt echivalente și că funcția  $\lambda$  este o schimbare de parametru.

Dacă notăm cu  $\tilde{x}(s) = x[\lambda^{-1}(s)]$ ,  $\tilde{y}(s) = y[\lambda^{-1}(s)]$  și  $\tilde{z}(s) = z[\lambda^{-1}(s)]$ ,  $\forall s \in [0, L]$ , atunci  $x = \tilde{x}(s)$ ,  $y = \tilde{y}(s)$ ,  $z = \tilde{z}(s)$ ,  $s \in [0, L]$  constituie o reprezentare parametrică a drumului  $\rho$  și deci a lui  $r$  (deoarece  $\rho \sim r$ ).

**Definiția 4.3.1** *reprezentarea parametrică*  $x = \tilde{x}(s)$ ,  $y = \tilde{y}(s)$ ,  $z = \tilde{z}(s)$ ,  $s \in [0, L]$  poartă numele de *reprezentarea parametrică normală* a drumului  $r$ .

În reprezentarea parametrică normală, parametrul  $s$  reprezintă lungimea arcului  $\overline{AM}$  unde  $A(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0), \tilde{z}(0))$  și  $M[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]$ .

O proprietate importantă a reprezentării normale este următoarea  $\left\| \frac{d\rho}{ds} \right\| = 1$ .

Într-adevăr,  $\rho = r[\lambda^{-1}(s)]$ ,  $s \in [0, L]$ . Ținând seama de regulile de derivare a funcțiilor compuse și inverse, și de faptul că  $\lambda'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$ , rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= \frac{dr[\lambda^{-1}(s)]}{d[\lambda^{-1}(s)]} \cdot \frac{d(\lambda^{-1}(s))}{ds} = \frac{dr(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\lambda'(t)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} (x'(t), y'(t), z'(t)), \text{ unde } t = \lambda^{-1}(s). \end{aligned}$$

Așadar, avem

$$\left\| \frac{d\rho}{ds} \right\| = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = 1.$$



Din punct de vedere geometric  $\frac{d\rho}{ds}$  reprezintă versorul tangentei la curbă, orientată în sensul creșterii parametrului  $s$ , adică de la  $A$  către  $B$ .

**Exemplul 4.3.1** Fie drumul  $r: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definit prin

$r(t) = (R \sin t, R \cos t)$ ,  $t \in [0, \pi/2]$ . Avem:

$$L = L(s) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r'^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} dt = R \cdot \pi/2 \text{ și}$$

$$s = \lambda(t) = \int_0^t \sqrt{R^2 \cos^2 u + R^2 \sin^2 u} du = R \cdot t, \quad t \in [0, \pi/2]. \text{ Funcția inversă}$$

$$\text{este: } t = \lambda^{-1}(s) = \frac{s}{R}, \quad s \in \left[0, \frac{R\pi}{2}\right].$$

Reprezentarea normală este:

$$\tilde{x}(s) = R \sin \frac{s}{R}, \quad \tilde{y}(s) = R \cos \frac{s}{R}, \quad s \in \left[0, \frac{R\pi}{2}\right].$$

Drumul  $\rho = \rho(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ ,  $s \in \left[0, \frac{R\pi}{2}\right]$  este echivalent cu drumul  $r$  și

are aceeași orientare cu acesta.

Dacă notăm cu  $\gamma_+$  curba determinată de drumul  $r$  orientat în sensul creșterii parametrului  $t$ , atunci  $\rho \in \gamma_+$ .

**Exemplul 3.4.2** Fie  $r: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  drumul parametrizat definit prin

$r(t) = (R \cos t, R \sin t, ht)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Avem

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + h^2} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2};$$

$$s = \lambda(t) = \int_0^t \sqrt{R^2 \sin^2 u + R^2 \cos^2 u + h^2} du = t \sqrt{R^2 + h^2}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Funcția inversă este  $t = \lambda^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}$ ,  $s \in [0, 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}]$  și

reprezentarea normală este  $\tilde{x}(s) = R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}$ ,  $\tilde{y}(s) = R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}$ ,

$$\tilde{z}(s) = \frac{hs}{\sqrt{R^2 + h^2}}, \quad s \in [0, 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}].$$

#### 4.4. INTEGRALE CURBILINII DE PRIMA SPEȚĂ

Fie  $\gamma$  o curbă netedă și fie  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$ ,  $t \in [a, b]$  o reprezentare parametrică a sa. O astfel de curbă este rectificabilă și lungimea sa este  $L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$ . Fie de asemenea,  $x = \tilde{x}(s)$ ,  $y = \tilde{y}(s)$ ,  $z = \tilde{z}(s)$ ,  $s \in [0, L]$  reprezentarea normală a curbei  $\gamma$  și fie  $f$  o funcție reală definită pe suportul curbei  $\gamma$  sau pe o mulțime din  $\mathbb{R}^3$  care conține acest suport.

**Definiția 4.4.1.** Se numește integrala curbilinie de prima speță a funcției  $f$  pe curba  $\gamma$ , următoarea integrală definită:  $\int_0^L [\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] ds$ , dacă aceasta există. Pentru integrala curbilinie de prima speță se folosește notația:  $\int_{\gamma} f(x, y, z) ds$ .

Așadar avem:

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L [\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] ds \quad (1)$$

Reamintim că am notat cu  $s$  elementul de arc, anume

$$s = \lambda(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)} du \quad (2)$$

**Exemplul 4.4.1.** Să se calculeze  $\int_{\gamma} (x + y + z) ds$ , unde  $\gamma$  este elicea circulară

$x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $z = ht$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Așa cum am arătat în Exemplul 3.4.2 reprezentarea normală a elicei circulare este:  $\tilde{x}(s) = R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}$ ,  $\tilde{y}(s) = R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}$ ,  $\tilde{z}(s) = \frac{hs}{\sqrt{R^2 + h^2}}$ ,

$s \in [0, 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}]$ . Rezultă

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x, y, z) ds &= \int_0^{2\pi\sqrt{R^2 + h^2}} \left( R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} + R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{hs}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) ds = \\ &= \left( R\sqrt{R^2 + h^2} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} - R\sqrt{R^2 + h^2} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cdot \frac{s^2}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi\sqrt{R^2 + h^2}} = \\ &= 2h\pi^2\sqrt{R^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Dacă am cunoaște reprezentarea normală a oricărei curbe, atunci formula (1) ar fi suficientă pentru calculul integralei curbilinie de prima speță. De regulă, o

curbă se dă printr-o reprezentare parametrică în care parametrul  $t$  este oarecare, iar reprezentarea sa normală nu se cunoaște. Teorema următoare permite calculul integralei curbilinii de prima speță în cazul când reprezentarea parametrică este oarecare.

**Teorema 4.4.1.** Fie  $\gamma$  o curbă netedă și fie  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [a, b]$  o reprezentare parametrică a sa. Dacă  $A \subset \mathbb{R}^3$  este o mulțime care conține suportul curbei  $\gamma$  și  $f : A \rightarrow \mathbb{P}$  este continuă, atunci există integrala curbilinie de prima speță a funcției  $f$  pe curba  $\gamma$  și

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \quad (3)$$

*Demonstrație.*

Deoarece  $f$  este continuă și funcțiile  $x, y, z$  sunt de clasă  $C^1$  pe  $[a, b]$ , rezultă că integrala din membrul drept există. Pe de altă parte, funcțiile  $\tilde{x} = x \circ \lambda^{-1}$ ,  $\tilde{y} = y \circ \lambda^{-1}$ ,  $\tilde{z} = z \circ \lambda^{-1}$  sunt de asemenea de clasă  $C^1$  pe intervalul  $[0, L]$ , deci și integrala din membrul stâng există. Conform Definiției 4.4.1 avem:

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_0^L f[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] ds.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă  $s = \lambda(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , rezultă  $\tilde{x} \circ \lambda = x$ ,  $\tilde{y} \circ \lambda = y$ ,  $\tilde{z} \circ \lambda = z$ ,  $ds = \lambda'(t) dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$  și mai departe:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x, y, z) ds &= \int_0^L f[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] ds = \int_{\lambda^{-1}(0)}^{\lambda^{-1}(L)} f[x(t), y(t), z(t)] \lambda'(t) dt = \\ &= \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Reluând exemplul 4.4.1 și ținând seama de Teorema 4.4.1 obținem:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x + y + z) ds &= \int_0^{2\pi} (R \cos t + R \sin t + ht) \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + h^2} dt = \\ &= \sqrt{R^2 + h^2} \left( R \sin t - R \cos t + h \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 h \sqrt{R^2 + h^2}. \end{aligned}$$

**Observația 4.4.1.** În cazul unei curbe plane formula (3) devine

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

**Exemplul 4.4.2.** Să se calculeze  $\int_{\gamma} xy \, ds$ , unde  $\gamma$  este porțiunea din primul

cadran a elipsei  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . O reprezentare parametrică a curbei  $\gamma$  este:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Conform Teoremei 4.4.1 avem

$$\int_{\gamma} xy \, ds = \int_0^{\pi/2} ab \sin t \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă  $u = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$ ,  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

atunci rezultă  $du = 2(a^2 - b^2) \sin t \cos t \, dt$  și mai departe,

$$\int_{\gamma} xy \, ds = \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \int_{b^2}^{a^2} \sqrt{u} \, du = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} u^{3/2} \Big|_{b^2}^{a^2} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}.$$

**Observația 4.4.2.** Dacă  $\gamma$  este o curbă netedă pe porțiuni (este o justapunere de curbe netede) atunci avem:

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) \, ds = \sum_{i=1}^P \int_{\gamma_i} f(x, y, z) \, ds, \quad \text{unde } \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_P.$$

**Observația 4.4.3.** Integrala curbilinie de prima speță nu depinde de orientarea curbei. Într-adevăr, funcțiile  $x = \tilde{x}(L-s)$ ,  $y = \tilde{y}(L-s)$ ,  $z = \tilde{z}(L-s)$ ,  $s \in [0, L]$  formează o reprezentare parametrică a curbei  $\gamma_-$ . Dacă notăm cu  $u = L-s$  rezultă:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_-} f(x, y, z) \, ds &= \int_0^L f[\tilde{x}(L-s), \tilde{y}(L-s), \tilde{z}(L-s)] \, ds = \\ &= - \int_L^0 f[\tilde{x}(u), \tilde{y}(u), \tilde{z}(u)] \, du = \int_0^L f[\tilde{x}(u), \tilde{y}(u), \tilde{z}(u)] \, du = \int_{\gamma_+} f(x, y, z) \, ds. \end{aligned}$$

În continuare prezentăm interpretarea fizică a integralei curbilinie de prima speță. Într-adevăr, să presupunem că un fir material de grosime neglijabilă are forma curbei  $\gamma$  netedă. Fie  $x = \tilde{x}(s)$ ,  $y = \tilde{y}(s)$ ,  $z = \tilde{z}(s)$ ,  $s \in [0, L]$ , reprezentarea normală a curbei  $\gamma$ . Notăm cu  $\overline{AB}$  suportul curbei  $\gamma$  și cu  $\rho : \overline{AB} \rightarrow \mathbb{P}_+$  funcția (continuă) care exprimă densitatea firului material.

Fie  $\Delta: 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{i-1} < s_i < \dots < s_n = L$  o diviziune oarecare a intervalului  $[0, L]$  și fie  $M_i \in \overline{AB}$  punctul de coordonate  $(\tilde{x}(s_i), \tilde{y}(s_i), \tilde{z}(s_i))$ .

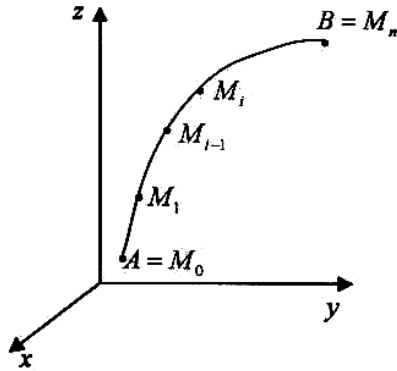


Fig. 1

Precizăm că  $s_i$  reprezintă lungimea arcului  $\overline{AM_i}$ . Dacă diviziunea  $\Delta$  este suficient de fină, putem presupune că pe porțiunea  $\overline{M_{i-1}, M_i}$  densitatea firului este constantă și anume este egală, de exemplu, cu valoarea funcției  $\rho$  într-unul din capete. Așadar, presupunem că  $\rho(M) = \rho(M_i)$ ,  $\forall M \in \overline{M_{i-1}, M_i}$ . Rezultă că masa porțiunii  $\overline{M_{i-1}, M_i}$  a firului material este aproximativ egală cu produsul  $\rho(M_i)(s_i - s_{i-1})$ ,

iar masa întregului fir  $\overline{AB}$ , se aproximează cu suma  $\sum_{i=1}^n \rho(M_i)(s_i - s_{i-1})$ . Valoarea

exactă a masei firului material va fi  $\mu = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(M_i)(s_i - s_{i-1}) = \int_{\gamma} \rho(x, y, z) ds$ ,

sensul exact fiind următorul:  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât, oricare ar fi diviziunea  $\Delta$  a intervalului  $[0, L]$ , cu  $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$  avem  $\left| \mu - \sum_{i=1}^n \rho(M_i)(s_i - s_{i-1}) \right| < \varepsilon$ .

În concluzie,  $\int_{\gamma} \rho(x, y, z) ds$  reprezintă masa unui fir material de grosime neglijabilă, care are forma curbei  $\gamma$  de suport  $\overline{AB}$  și de densitate  $\rho = \rho(x, y, z)$ ,  $\forall (x, y, z) \in \overline{AB}$ .

Dacă notăm cu  $x_G, y_G$  și  $z_G$  coordonatele centrului de greutate ale firului material, atunci, procedând ca mai înainte, se arată că:

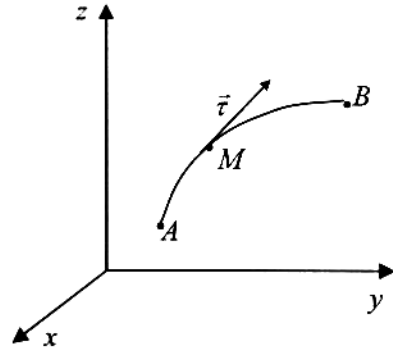
$$x_G = \frac{\int_{\gamma} x \rho(x, y, z) ds}{\int_{\gamma} \rho(x, y, z) ds}, \quad y_G = \frac{\int_{\gamma} y \rho(x, y, z) ds}{\int_{\gamma} \rho(x, y, z) ds}, \quad z_G = \frac{\int_{\gamma} z \rho(x, y, z) ds}{\int_{\gamma} \rho(x, y, z) ds}.$$

În cazul unui fir omogen ( $\rho(M) = \kappa$ ,  $\forall M \in \overline{AB}$ ), rezultă:

$$x_G = \frac{\int_{\gamma} x ds}{\int_{\gamma} ds}, \quad y_G = \frac{\int_{\gamma} y ds}{\int_{\gamma} ds}, \quad z_G = \frac{\int_{\gamma} z ds}{\int_{\gamma} ds}.$$

#### 4.5. INTEGRALA CURBILINIE DE SPEȚA A DOUA

Fie  $\gamma$  o curbă netedă de suport  $\overline{AB}$  și fie  $x = \tilde{x}(s)$ ,  $y = \tilde{y}(s)$ ,  $z = \tilde{z}(s)$ ,  $s \in [0, L]$ , reprezentarea sa normală. Vom nota cu  $\vec{\tau} = \vec{\tau}(M)$  versorul tangentei la



curba  $\gamma$  într-un punct curent

$M[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \in \overline{AB}$ , orientat în sensul creșterii parametrului  $s$ . Se știe că

$\vec{\tau} = \left( \frac{d\tilde{x}}{ds}, \frac{d\tilde{y}}{ds}, \frac{d\tilde{z}}{ds} \right)$ . Considerăm de asemenea

o funcție vectorială  $\vec{F} = (P, Q, R)$  definită pe o mulțime  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ce conține suportul  $\overline{AB}$  al curbei  $\gamma$ , cu valori în  $\mathbb{R}^3$ . În notația vectorială, în care identificăm orice punct din

$\mathbb{R}^3$  cu vectorul său de poziție, avem:

$$\vec{\tau} = \frac{d\tilde{x}}{ds} \vec{i} + \frac{d\tilde{y}}{ds} \vec{j} + \frac{d\tilde{z}}{ds} \vec{k} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}, \text{ unde } \alpha, \beta \text{ și } \gamma \text{ sunt unghiurile}$$

pe care le face  $\vec{\tau}$  cu  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$ .

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}, \quad \forall (x, y, z) \in \Omega.$$

**Definiția 4.5.1.** Se numește integrala curbilinie de speța a doua a funcției  $\vec{F} = (P, Q, R)$  pe curba  $\gamma_+$ , următoarea integrală definită:

$$\begin{aligned} \int_0^L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds &= \\ &= \int_0^L (P[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{x}'(s) + Q[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{y}'(s) + R[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{z}'(s)) ds \end{aligned}$$

Pentru integrala curbilinie de speța a doua se folosește notația

$$\int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \text{ Așadar avem:}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \\ &= \int_0^L (P[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \tilde{x}'(s) + Q[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \tilde{y}'(s) + R[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \tilde{z}'(s)) ds \end{aligned} \quad (1)$$

Următoarea teoremă permite calculul integralei curbilinii de speța a doua când reprezentarea parametrică a curbei este oarecare.

**Teorema 4.5.1.** Fie  $\gamma$  o curbă netedă și fie  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [a, b]$  o reprezentare parametrică a sa. Notăm cu  $\gamma_+$  curba  $\gamma$  orientată în sensul creșterii parametrului  $t$ . Dacă  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  este o mulțime ce conține suportul  $\overline{AB}$  al curbei  $\gamma$  și  $F = (P, Q, R): A \rightarrow \mathbb{R}^3$  este o funcție vectorială continuă, atunci există integrala curbilinie de speța a doua pe curba  $\gamma_+$  și

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_a^b (P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)) dt \end{aligned} \quad (2)$$

*Demonstrație.*

Deoarece  $\gamma$  este netedă, rezultă că  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  și  $\tilde{z}$  sunt de clasă  $C^1$  pe  $[0, L]$ , deci  $\vec{\tau}: \overline{AB} \rightarrow \mathbb{R}^3$  este o funcție vectorială continuă. Cum și  $\vec{F}$  este continuă, deducem că  $\int_0^L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds$  există, deci integrala din membrul stâng are sens. Este evident că și integrala din membrul drept există, deoarece  $x$ ,  $y$  și  $z$  sunt de clasă  $C^1$  pe  $[a, b]$  și  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  sunt continue pe  $\overline{AB}$ .

Conform definiției 4.5.1  $\int_{\gamma_+} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$  este egală cu integrala din membrul drept al egalității (1). Vom face în această integrală schimbarea de variabilă  $s = \lambda(t)$ ,  $t \in [a, b]$  și obținem  $\tilde{x}[\lambda(t)] = x[\lambda^{-1}(\lambda(t))] = x(t)$  și analog  $\tilde{y}[\lambda(t)] = y(t)$ ,  $\tilde{z}[\lambda(t)] = z(t)$ . De asemenea, ținând seama de regulile de derivare a funcțiilor compuse și inverse, avem

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(s) ds &= \frac{d}{ds} [x(\lambda^{-1}(s))] ds = \frac{dx[\lambda^{-1}(s)]}{d[\lambda^{-1}(s)]} \cdot \frac{d[\lambda^{-1}(s)]}{ds} ds = \\ &= x'(t) \frac{1}{\lambda'(t)} \cdot \lambda'(t) dt = x'(t) dt. \end{aligned}$$

În mod asemănător avem  $\tilde{y}'(s) ds = y'(t) dt$ ,  $\tilde{z}'(s) ds = z'(t) dt$ . În urma acestei schimbări de variabilă rezultă:

$$\begin{aligned} \int_0^L (P[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{x}'(s) + Q[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{y}'(s) + R[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{z}'(s)) ds = \\ = \int_a^b (P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)) dt. \end{aligned}$$

Cu aceasta, teorema este demonstrată.

**Observația 4.5.1.** Integrala curbilinie de speța a doua depinde de orientarea curbei. Într-adevăr, versorul tangentă la curba  $\gamma_-$  într-un punct curent  $M \in \overline{AB}$  este egal cu  $-\vec{\tau}$ , de unde rezultă că:

$$\int_{\gamma_-} P dx + Q dy + R dz = \int_0^L \vec{F} \cdot (-\vec{\tau}) ds = - \int_0^L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = - \int_{\gamma_+} P dx + Q dy + R dz.$$

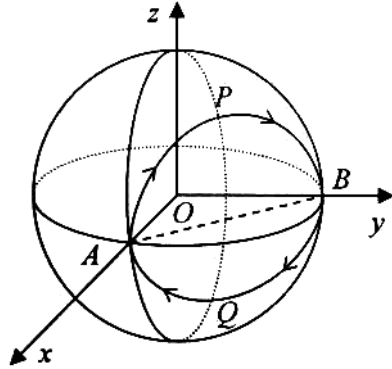
**Exemplul 4.5.1.** Să se calculeze  $\int_{\gamma_+} y dx + z dy + x dz$ , unde

$$\gamma_+ : x = \frac{R}{2}(1 + \cos t), y = \frac{R}{2}(1 - \cos t), z = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Conform Teoremei 4.5.1 avem:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} y dx + z dy + x dz &= \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{R}{2}(1 + \cos t) \left( -\frac{R}{2} \sin t \right) + \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t \left( \frac{R}{2} \sin t \right) + \frac{R}{2}(1 + \cos t) \frac{R}{\sqrt{2}} \cos t \right) dt = \\ &= \frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Observăm că din punct de vedere geometric, suportul curbei  $\gamma$  este cercul



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y = R. \end{cases}$$

Acest cerc se află în planul  $x + y = R$  care este paralel cu axa  $Oz$  și trece prin punctele  $A(R, 0, 0)$  și  $B(0, R, 0)$ ; segmentul  $[AB]$  este un diametru al său. Cercul are centrul în punctul  $\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, 0\right)$  și raza  $\frac{R}{\sqrt{2}}$ . Dacă notăm

cu  $P\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$  și cu  $Q\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, -\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$  alte

două puncte ale cercului, constatăm că punctul  $A$  corespunde valorii  $t = 0$ , a parametrului,  $P$  corespunde valorii  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  $B$  corespunde valorii  $t = \pi$  și  $Q$  corespunde

valorii  $t = \frac{3\pi}{2}$ . Așadar, curba  $\gamma_+$  este cercul din planul  $x + y = R$ , de centru

$\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, 0\right)$  și raza  $\frac{R}{\sqrt{2}}$ , orientat în sensul  $APBQA$ .



**Observația 4.5.2.** Dacă curba  $\gamma$  este dată printr-o reprezentare parametrică,  $\gamma_+$  reprezintă curba  $\gamma$  orientată în sensul creșterii parametrului. Dacă însă curba  $\gamma$  este o curbă închisă și este dată ca o intersecție de două suprafețe, atunci orientarea curbei nu este evidentă și trebuie indicată prin enunț. De exemplu, în cazul cercului de mai sus, se poate specifica faptul că acesta este parcurs în sensul acelor unui ceasornic dacă privim din punctul  $O$ , originea sistemului de axe. Faptul că este vorba de o curbă închisă, se poate marca printr-un cerc pe semnul integralei. Exemplul 4.5.1 se poate reformula astfel: Să se calculeze  $\oint_{\gamma_+} y dx + z dy + x dz$  unde

$\gamma_+$  este cercul  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y = R \end{cases}$  parcurs în sensul acelor unui ceasornic dacă privim din centrul sferei.

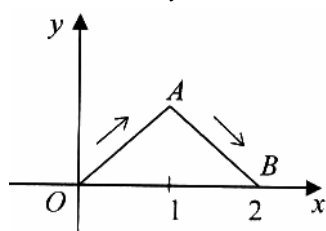
**Observația 4.5.3.** Dacă  $\gamma$  este netedă pe porțiuni (este o justapunere de curbe netede:  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_p$ , atunci

$$\int_{\gamma_+} P dx + Q dy + R dz = \sum_{i=1}^p \int_{(\gamma_i)_+} P dx + Q dy + R dz.$$

**Observația 4.5.4.** În cazul unei curbe plane, formula (2) devine:

$$\int_{\gamma_+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt.$$

**Exemplul 4.5.2.** Să se calculeze  $\int_{\gamma_+} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ , unde  $\gamma_+$  este graficul curbei  $y = 1 - |1 - x|$ ,  $x \in [0, 2]$ . Explicitând modulul obținem:



$$y = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{dacă } x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$\text{Cum } \gamma_+ = \overline{OA} \cup \overline{AB} \text{ rezultă } \int_{\gamma_+} = \int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}}.$$

Deoarece  $x = t, y = t, t \in [0, 1]$  este o reprezentare parametrică a segmentului  $\overline{OA}$ , din Observația

4.5.4 deducem:

$$\int_{\overline{OA}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

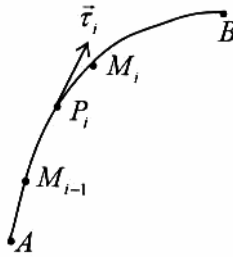
Pe de altă parte, o reprezentare parametrică a segmentului  $\overline{AB}$  este  $x = t, y = 2 - t, t \in [1, 2]$ . Rezultă:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy &= \int_0^1 [(t^2 + (2-t)^2)(1) + (t^2 - (2-t)^2)(-1)] dt = \\ &= 2 \int_1^2 (2-t)^2 dt = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Așadar, } \int_{\gamma_+} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = \frac{4}{3}.$$

Pentru interpretarea fizică a integralei curbilinii de speța a doua, considerăm o curbă netedă  $\gamma$ , de suport  $\overline{AB}$ . Fie  $x = \tilde{x}(s)$ ,  $y = \tilde{y}(s)$  și  $z = \tilde{z}(s)$ ,  $s \in [0, L]$  repre-

zentarea normală a curbei  $\gamma_+$ , fie  $\vec{F} = (P, Q, R): \overline{AB} \subset \mathbb{R}^3$  o funcție vectorială continuă și fie  $\Delta: 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{i-1} < s_i < \dots < s_n = L$  o diviziune oarecare a intervalului  $[0, L]$ . Notăm cu  $M_i$  punctul de coordonate  $(\tilde{x}(s_i), \tilde{y}(s_i), \tilde{z}(s_i))$ . Lungimea arcului  $\overline{M_{i-1}M_i}$  este egală cu  $s_i - s_{i-1}$ . Fie  $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$  un punct arbitrar, fie  $P_i[\tilde{x}(\xi_i), \tilde{y}(\xi_i), \tilde{z}(\xi_i)]$  punctul corespunzător de pe arcul  $\overline{M_{i-1}M_i}$  și fie  $\vec{\tau}_i$  versorul tangentei în  $P_i$  la curba  $\gamma_+$ .



Dacă diviziunea  $\Delta$  este suficient de fină, putem presupune că funcția vectorială  $\vec{F} = (P, Q, R)$  pe care o interpretăm ca o forță, este constantă pe arcul  $\overline{M_{i-1}M_i}$  și anume este egală cu valoarea sa în punctul  $P_i$ . În aceste condiții, lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe arcul  $\overline{M_{i-1}M_i}$  sub acțiunea forței  $\vec{F}$  se poate aproxima cu  $\vec{F}(P_i) \cdot \vec{\tau}_i(s_i - s_{i-1})$ , unde cu  $\vec{F}(P_i) \cdot \vec{\tau}_i$  am notat produsul scalar al celor doi vectori. Lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe arcul  $\overline{AB}$  sub acțiunea forței variabile  $\vec{F}$  se aproximează cu suma  $\sum_{i=1}^n \vec{F}(P_i) \cdot \vec{\tau}_i(s_i - s_{i-1})$ . Valoarea exactă a lucrului mecanic va fi egal cu:

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(P_i) \cdot \vec{\tau}_i(s_i - s_{i-1}) = \int_{\gamma_+} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

În consecință  $\int_{\gamma_+} P dx + Q dy + R dz$  reprezintă lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe curba  $\gamma_+$  sub acțiunea forței variabile  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ .

#### 4.6 INDEPENDENȚA DE DRUM A INTEGRALEI CURBILINII DE SPEȚA A DOUA

În acest paragraf vom analiza cazul când integrala curbilinie de speța a doua depinde numai de extremitățile curbei și nu depinde de curba însăși. Acest caz este interesant atât din punct de vedere matematic, deoarece calculul unei astfel de integrale este mai simplu, cât și din punct de vedere practic, deoarece are aplicații în termodinamică.

**Definiția 4.6.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^3$  o mulțime deschisă și fie  $P, Q, R : A \rightarrow \mathbb{R}$ , trei funcții oarecare. Se numește formă diferențială de gradul întâi pe mulțimea  $A$ , de coeficienți  $P, Q$  și  $R$ , următoarea expresie:  $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ ,  $\forall (x, y, z) \in A$ . Dacă, în plus  $P, Q$  și  $R$  sunt de clasă  $C^P$  pe  $A$ , atunci  $\omega$  se numește formă diferențială de gradul întâi, de clasă  $C^P$ .

**Exemplul 4.6.1.** Dacă  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  este diferențiabilă pe  $A$ , atunci diferențiala sa de ordinul întâi:  $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$  este o formă diferențială de gradul întâi pe  $A$ , de coeficienți  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  și  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .

Formele diferențiale de tipul celui din Exemplul 4.6.1 se numesc exacte. Mai precis:

**Definiția 4.6.2.** Forma diferențială de gradul întâi  $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ ,  $\forall (x, y, z) \in A$  se numește exactă, dacă există o funcție  $f \in C^1(A)$  astfel încât  $\omega = df$ , ceea ce revine la următoarele egalități pe  $A$ :

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, Q = \frac{\partial f}{\partial y}, R = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

**Observația 4.6.1.** Dacă considerăm câmpul vectorial  $\vec{v} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ ,  $\forall (x, y, z) \in A$ , atunci forma diferențială  $\omega$ , de coeficienți  $P, Q$  și  $R$ , este exactă pe  $A$ , dacă  $\vec{v}$  este un câmp de

potențial, adică dacă  $\exists f \in C^1(A)$  astfel încât  $\vec{v} = \text{grad } f$  (Vezi [10], Definiția 4.14.4).

**Teorema 4.6.1.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^3$  un domeniu și fie  $P, Q$ , și  $R$  trei funcții reale, continue pe  $D$ . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Forma diferențială  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  este exactă pe  $D$ ;
- (ii)  $\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0$ , pentru orice curbă închisă  $\gamma$ , netedă pe porțiuni, al cărui suport este inclus în  $D$ ;
- (iii)  $\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$  nu depinde de drum în domeniul  $D$ , în sensul următor:  
oricare ar fi două puncte  $A, B \in D$  și oricare ar fi două curbe netede pe porțiuni,  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$  care au suporturile incluse în  $D$  și au aceleași capete  $A$  și  $B$  avem:

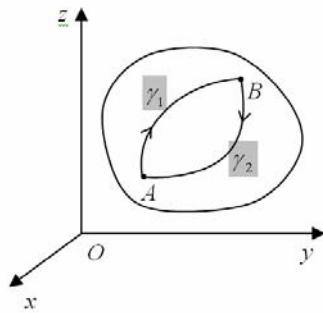


Fig. 1

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy + Rdz$$

*Demonstrație.* (i)  $\Rightarrow$  (iii). Prin ipoteză, există  $f \in C^1(D)$  astfel încât:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1)$$

Fie  $A$  și  $B$  două puncte oarecare din  $D$  și fie  $\gamma$  o curbă netedă pe porțiuni, al cărui suport  $\overline{AB}$  este inclus în  $D$ . Dacă  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,

$z = z(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , este o reprezentare parametrică a curbei  $\gamma$ , atunci  $A$  are coordonatele  $(x(a), y(a), z(a))$  iar  $B$  are coordonatele  $(x(b), y(b), z(b))$ .

Fie  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , funcția compusă definită astfel:

$$F(t) = f[x(t), y(t), z(t)], \quad t \in [a, b].$$

Ținând seama de formulele de derivare ale funcțiilor compuse și de egalitățile (1) rezultă:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}[x(t), y(t), z(t)]z'(t) = \\ &= P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Egalitatea (2) este valabilă pentru orice punct  $t \in [a, b]$  cu excepția unui număr finit de puncte și anume, acele puncte  $t \in [a, b]$  care corespund punctelor de justapunere a curbelor ce compun  $\gamma$ . Cum egalitatea (2) este adevărată pe  $[a, b]$  cu excepția unei mulțimi neglijabile rezultă:

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma_+} Pdx + Qdy + Rdz = \\
& = \int_a^b (P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t))dt = \\
& = \int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) = f(B) - f(A)
\end{aligned}$$

Așadar, valoarea integralei nu depinde de forma curbei  $\gamma$  și depinde numai de capetele sale.

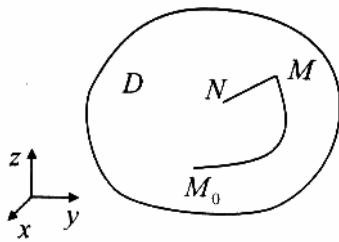


Fig. 2

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Fie  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$  un punct fixat, fie  $M(x, y, z) \in D$  un punct oarecare și fie  $\gamma$  o curbă netedă pe porțiuni, al cărui suport  $\overline{M_0M}$  este inclus în  $D$ .

Deoarece prin ipoteză, integrala nu depinde de drum în domeniul  $D$ , rezultă că putem defini o funcție  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , astfel:

$$f(x, y, z) = \int_{\overline{M_0M}} Pdx + Qdy + Rdz, \quad \forall$$

$M(x, y, z) \in D$ .

Fie  $N(x+h, y, z) \in D$  și fie  $x = t, y = y, z = z, t \in [x, x+h]$  o reprezentare parametrică a segmentului de drepte  $\overline{MN}$ . Avem:

$$\begin{aligned}
f(x+h, y, z) &= \int_{\overline{M_0M} \cup \overline{MN}} Pdx + Qdy + Rdz = \\
&= \int_{\overline{M_0M}} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{\overline{MN}} Pdx + Qdy + Rdz.
\end{aligned}$$

Ținând seama de Corolarul 2.4.3 de la Teorema de medie rezultă:

$$\frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = \frac{\int_{\overline{MN}} Pdx + Qdy + Rdz}{h} = \frac{\int_x^{x+h} P(t, y, z)dt}{h} = \frac{P(\xi, y, z)h}{h},$$

unde  $\xi$  este un punct cuprins între  $x$  și  $x+h$ . Folosind din nou faptul că  $P$  este continuă, rezultă că există  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = P(x, y, z)$ .

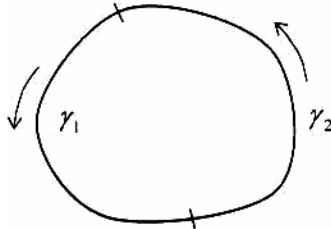
Așadar,  $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ .

În mod asemănător, înlocuind segmentul  $\overline{MN}$  cu un segment paralel cu axa  $Oy$  (respectiv  $Oz$ ) se arată că  $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$  și  $\frac{\partial f}{\partial z} = R$ , deci  $\omega$  este exactă.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Fie  $\gamma_1, \gamma_2$  curbele din Figura 1 și fie  $\gamma = \gamma_1 \cup (\gamma_2)_-$ . Evident  $\gamma$  este o curbă închisă, netedă pe porțiuni, al cărui suport este inclus în  $D$ . Din (iii) rezultă că  $\oint_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0$ . Dar  $\oint_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{(\gamma_2)_-} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = 0$ .

Așadar  $\int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$ , adică (ii).

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) Fie  $\gamma$  o curbă închisă, netedă pe porțiuni, al cărui suport este inclus în  $D$ , fie  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$  reprezentare parametrică a sa și fie



$a < c < b$  oarecare. Notăm cu  $\gamma_1$  curba a cărei reprezentare parametrică este  $r = r(t)$ ,  $t \in [a, c]$  și cu  $\gamma_2$  curba  $r = r(t)$ ,  $t \in [c, b]$ . Evident  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ . Prin ipoteză  $\int_{(\gamma_1)_+} = \int_{(\gamma_2)_-}$ , de unde

$$\text{rezultă } \int_{\gamma} = \int_{(\gamma_1)_+} + \int_{(\gamma_2)_-} = 0.$$

**Definiția 4.6.3.** O formă diferențială de ordinul întâi  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  se numește închisă pe domeniul  $D \subset \mathbb{R}^3$ , dacă  $P, Q, R$  sunt de clasă  $C^1$  pe  $D$  și dacă  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ .

**Observația 4.6.2.** Dacă considerăm câmpul vectorial  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ ,  $\forall (x, y, z) \in D$  atunci  $\omega$  este închisă dacă și numai dacă câmpul  $\vec{v}$  este irotational, adică dacă

$$\text{rot } \vec{v} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}.$$

**Teorema 4.6.2.** Dacă  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  este exactă și este de clasă  $C^1$  pe  $D$ , atunci  $\omega$  este închisă pe  $D$ .

*Demonstrație.* Prin ipoteză există  $f \in C^2(D)$  astfel încât  $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $R = \frac{\partial f}{\partial z}$ . Deoarece, în acest caz, derivatele de ordinul doi ale lui  $f$  sunt continue, rezultă că derivatele mixte sunt egale. Avem:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

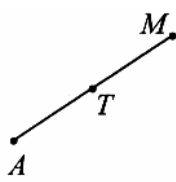
**Definiția 4.6.4.** O mulțime  $S \subset \mathbb{R}^3$  se numește stelată dacă există un punct  $A \in S$  cu proprietatea că  $\forall M \in S$ , segmentul de dreaptă de capete  $A$  și  $M$ , pe care-l notăm  $[A, M]$  este inclus în  $S$ . Reamintim că

$$[A, M] = \{(1-t)A + tM \mid t \in [0, 1]\}.$$

**Observația 4.6.3.** Orice mulțime convexă este stelată, în timp ce afirmația reciprocă nu este în general adevărată. De exemplu mulțimea  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x > 0\}$  este stelată (în raport cu  $O(0, 0)$ ) dar nu este convexă.

**Teorema 4.6.3.** Dacă  $D \subset \mathbb{R}^3$  este o mulțime stelată și deschisă, atunci orice formă diferențială închisă pe  $D$  este exactă pe  $D$ .

*Demonstrație.* Prin ipoteză, există  $A \in D$  astfel încât  $[A, M] \subset D, \forall M \in D$ .



Să presupunem că  $A$  are coordonatele  $(a, b, c)$  iar  $M$  are coordonatele  $(x, y, z)$ . Fie  $t \in [0, 1]$  oarecare și fie

$$T = (1-t)A + tM = ((1-t)a + tx, (1-t)b + ty, (1-t)c + tz),$$

punctul corespunzător de pe segmentul  $[A, M]$ . Definim o funcție  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , astfel:

$$f(x, y, z) = \int_0^1 [P(T)(x-a) + Q(T)(y-b) + R(T)(z-c)] dt$$

Ținând seama de teorema de derivare a integralei cu parametru (Teorema 3.2.2) rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \int_0^1 \left( \frac{\partial P}{\partial x}(T) \frac{\partial T}{\partial x}(x-a) + P(T) + \frac{\partial Q}{\partial x}(T) \frac{\partial T}{\partial x}(y-b) + \frac{\partial R}{\partial x}(T) \frac{\partial T}{\partial x}(z-c) \right) dt = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial P}{\partial x}(T) t(x-a) + P(T) + \frac{\partial Q}{\partial x}(T) t(y-b) + \frac{\partial R}{\partial x}(T) t(z-c) \right) dt. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, prin ipoteză avem  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  și  $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ , deci

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \int_0^1 \left( \frac{\partial P}{\partial x}(T) t(x-a) + \frac{\partial P}{\partial y}(T) t(y-b) + \frac{\partial P}{\partial z}(T) t(z-c) + P(T) \right) dt = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (tP(T)) dt = tP(T) \Big|_0^1 = 1 \cdot P(M) - 0 \cdot P(A) = P(M) = P(x, y, z). \end{aligned}$$

Așadar,  $\frac{\partial f}{\partial x} = P$  și analog  $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = R$ , deci  $\omega$  este exactă.

**Exemplul 4.6.2.** Să se calculeze  $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + zxdy + xydz$ . Dacă notăm cu  $P(x, y, z) = yz$ ,  $Q(x, y, z) = zx$  și  $R(x, y, z) = xy$ , atunci forma diferențială  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  este închisă pe  $\square^3$  deoarece  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z$ ;  $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x$ ;  $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = y$ . Din Teorema 4.6.3. rezultă că  $\omega$  este exactă, iar din Teorema 4.6.1 că integrala nu depinde de drum. Așadar, problema are sens. Deoarece integrala nu depinde de drum, calculul său se poate face alegând un drum avantajos și anume alegem linia frântă determinată de punctele  $A(1,2,3)$ ,  $B(6,2,3)$ ,  $C(6,1,3)$ ,  $D(6,1,1)$ .

$$\begin{aligned} \int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + zxdy + xydz &= \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} = \int_1^6 2 \cdot 3 dt + \int_2^1 6 \cdot 3 dt + \int_3^1 6 \cdot 1 dt = \\ &= 30 - 18 - 12 = 0. \end{aligned}$$

O soluție mai simplă se poate da, dacă observăm că  $\omega = df$ , unde  $f(x, y, z) = xyz$ . Atunci  $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + zxdy + xydz = xyz \Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} = 6 - 6 = 0$ .

**Observația 4.6.4.** În plan, o formă diferențială  $\omega = Pdx + Qdy$  este închisă, dacă  $P, Q \in C^1$  și  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

**Exemplul 4.6.2.** Să se calculeze  $\oint_{\gamma} (2y^2 - 4y + x)dx + 4x(y-1)dy$ , unde  $\gamma$  este cercul  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ .

Dacă notăm cu  $P(x, y) = 2y^2 - 4y + x$  și cu  $Q(x, y) = 4x(y-1)$ , atunci  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 4(y-1)$ . Rezultă că  $\omega = Pdx + Qdy$  este închisă în  $\square^2$ , deci este exactă în  $\square^2$ . Cum  $\gamma$  este o curbă închisă, din Teorema 4.6.1 rezultă că valoarea integralei este 0, deci nu e necesar nici un calcul.



## CAPITOLUL 5

### INTEGRALE MULTIPLE

#### 5.1. ARIA UNEI MULȚIMI PLANE

În cele ce urmează, prin mulțime plană poligonală, vom înțelege orice mulțime din plan mărginită de un poligon. În particular, prin mulțime plană dreptunghiulară (triunghiulară) înțelegem o mulțime plană a cărei frontieră este un dreptunghi (triunghi). Cititorul este familiarizat cu noțiunea de arie a unei mulțimi plane poligonale de la cursul de geometrie elementară. În acest paragraf vom da un sens noțiunii de mulțime care are arie, pentru o clasă de mulțimi mai generală decât clasa mulțimilor poligonale.

**Definiția 5.1.1** Prin mulțime elementară (în plan) înțelegem orice reuniune finită de mulțimi plane dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate, fără puncte interioare comune.

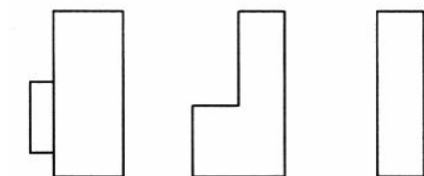


Fig. 1

Facem precizarea că orice reuniune finită de mulțimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate se poate reprezenta ca o mulțime elementară.

Așadar, o mulțime  $E \subset \mathbb{R}^2$  este elementară, dacă există un număr finit de dreptunghiuri (pline)  $D_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ ,

$$i = \overline{1, p} \text{ astfel încât } E = \bigcup_{i=1}^p D_i \text{ și}$$

$\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$  pentru  $i \neq j$ . Se știe că aria unui dreptunghi este egală cu produsul lungimilor laturilor, deci  $\text{aria } D_i = (b_i - a_i)(d_i - c_i)$ . Prin definiție, aria mulțimii elementare  $E$  este

$$\text{aria } E = \sum_{i=1}^p \text{aria } D_i. \quad (1)$$

În continuare, vom nota cu  $\mathbf{E}$  familia mulțimilor elementare din plan. Dacă  $A \subset \mathbb{R}^2$  este o mulțime mărginită, atunci vom nota cu:

$$S_*(A) = \sup \{ \text{aria } E; E \subset A, E \in \mathbf{E} \} \text{ și}$$

$$S^*(A) = \inf \{ \text{aria } F; F \supset A, F \in \mathbf{E} \}.$$

În cazul când mulțimea  $A$  nu conține nici o mulțime elementară, vom defini  $S_*(A) = 0$ . Cu această precizare, este evident că cele două margini există și că  $S_*(A) \leq S^*(A)$ .

**Definiția 5.1.2** Spunem că o mulțime mărginită  $A \subset \mathbb{R}^2$  este măsurabilă (are arie) în sensul lui Jordan, dacă  $S_*(A) = S^*(A) = S(A)$ . Valoarea comună  $S(A)$  se numește aria mulțimii  $A$ .

**Observația 5.1.1** Orice mulțime elementară are arie în sensul Definiției 5.1.2 și aceasta coincide cu aria definită în (1), adică cu suma ariilor dreptunghiulare care o compun.

**Observația 5.1.2** Orice mulțime poligonală are arie în sensul Definiției 5.1.2 și aceasta coincide cu aria cunoscută din geometria elementară. Într-adevăr, deoarece orice mulțime poligonală este o reuniune finită de mulțimi triunghiulare și orice triunghi este reuniunea sau diferența a două triunghiuri dreptunghice, este suficient să arătăm că orice mulțime plană a cărei frontieră este un triunghi

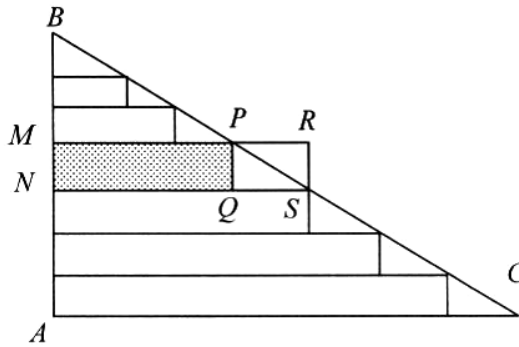


Fig. 2

dreptunghic are arie. Fie un triunghi dreptunghic  $ABC$ ,  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{AC} = b$ . Împărțim cateta  $AB$  în  $n$  părți egale și considerăm dreptunghiuri de tipul  $MNPQ$  unde  $\overline{MN} = \frac{a}{n}$  și  $MP$  este paralelă cu

$AB$ . Să presupunem că  $\overline{BM} = i \cdot \frac{a}{n}$ .

Din asemănarea triunghiurilor  $BMP$  și  $BAC$  rezultă  $\frac{\overline{BM}}{a} = \frac{\overline{MP}}{b}$ ,

deci  $\overline{MP} = i \cdot \frac{b}{n}$ . Așadar, aria dreptunghiului  $MPQM$  este  $i \cdot \frac{ab}{n^2}$ . Dacă notăm cu  $E$

reuniunea acestor dreptunghiuri, atunci  $E \in \mathbb{E}$ ,  $E$  este inclusă în mulțimea triunghiului  $ABC$  și aria  $E = \frac{ab}{n^2}(1 + 2 + \dots + (n-1)) = \frac{ab(n-1)}{2n}$ . În mod analog, dacă

notăm cu  $F$  reuniunea dreptunghiurilor de tipul  $MRSN$ , atunci  $F$  este o mulțime elementară care include triunghiul  $ABC$  și aria  $F = \frac{ab}{n^2}(1 + 2 + \dots + n) = \frac{ab(n+1)}{2n}$ . În

continuare avem

$$\frac{ab}{2} = \sup_n \frac{ab(n-1)}{2n} \leq S_*(\Delta ABC) \leq S^*(\Delta ABC) \leq \inf_n \frac{ab(n+1)}{n} = \frac{ab}{2},$$

deci  $S_*(\Delta ABC) = S^*(\Delta ABC) = \frac{ab}{2}$ . Așadar, mulțimea triunghiulară  $ABC$  are arie în sensul Definiției 5.1.2 și aceasta coincide cu aria triunghiului dreptunghic cunoscută din geometria elementară.

**Definiția 5.1.3.** Prin mulțimea elementară poligonală înțelegem orice reuniune finită de mulțimi poligonale care nu au puncte interioare comune.

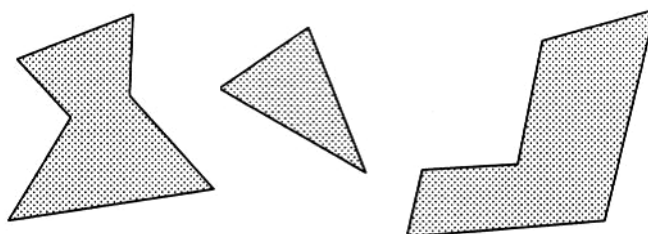


Fig. 3

**Propoziția 5.1.1.** Orice mulțime elementară poligonală este inclusă într-o mulțime elementară de arie cel mult de 8 ori aria mulțimii elementare poligonale inițială.

*Demonstrație*

Demonstrația se bazează pe următoarele observații:

- 1) Orice mulțime poligonală este o reuniune finită de mulțimi triunghiulare;
- 2) Orice triunghi (plin) este reuniunea sau diferența a două triunghiuri (pline) dreptunghice;
- 3) Orice triunghi dreptunghic este inclus într-un dreptunghi de arie de două ori mai mare ca aria sa;
- 4) Orice dreptunghi este o reuniune finită de pătrate și un dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 și 2.

Într-adevăr, fie  $D$  un dreptunghi de laturi  $a$  și  $b$  cu  $\frac{a}{b} > 2$ .

Fie  $r = \frac{m}{n}$  un număr rațional cu proprietatea

$$\frac{a}{b} - 2 < \frac{m}{n} < \frac{a}{b} - 1 \quad (2)$$

și fie  $D_1$  dreptunghiul de laturi  $b$  și  $\frac{m}{n}b$ , iar  $D_2$  dreptunghiul de laturi  $b$  și  $a - \frac{m}{n}b$ .

Evident  $D = D_1 \cup D_2$ . Observăm că dreptunghiul  $D_1$  este reuniunea a  $n \times m$  pătrate de latură  $\frac{b}{n}$ . Pe de altă parte, din (2) rezultă  $a - 2b < \frac{m}{n}b < a - b$  și mai

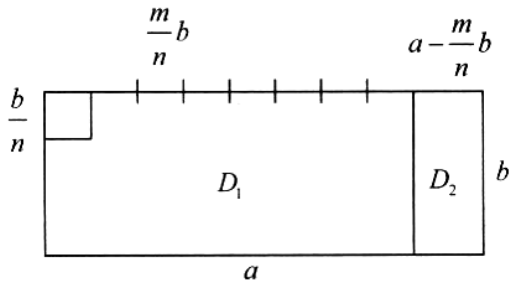


Fig. 4

departe  $b < a - \frac{m}{n}b < 2b$ . Așadar,

avem  $1 < \frac{a - \frac{m}{n}b}{b} < 2$ , deci raportul laturilor dreptunghiului  $D_2$  este cuprins între 1 și 2.

5) Orice dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 și 2 este inclus într-un pătrat de arie cel mult dublul ariei dreptunghiului inițial.

6) Orice pătrat este inclus într-un pătrat cu laturile paralele cu axele de coordonate și de arie dublă. Ținând seama și de 5) rezultă că orice dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 și 2 este inclus într-un pătrat cu laturile paralele cu axele de coordonate și de arie cel mult de 4 ori aria dreptunghiului inițial.

Din cele de mai sus rezultă că orice mulțime poligonală poate fi inclusă într-o reuniune finită de mulțimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate de arie cel mult de 8 ori aria mulțimii poligonale inițiale.

În sfârșit, să observăm că orice reuniune finită de mulțimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate se poate reprezenta ca o mulțime elementară având aceeași arie.

**Observație 5.1.3.** Există mulțimi plane care nu au arie.

Într-adevăr, fie funcția lui Dirichlet  $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$  și fie

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq D(x)\}.$$

Se observă imediat, în acest caz, că  $S_*(A) = 0$  și  $S^*(A) = 1$ , deci mulțimea  $A$  nu este măsurabilă (nu are arie).

Următoarea propoziție ne furnizează exemple de mulțimi care au arie. Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{Q}_+$  și fie  $\Gamma_f$  subgraficul său, adică mulțimea

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

**Propoziția 5.1.2** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci subgraficul său  $\Gamma_f$  are arie și  $\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$ .

*Demonstrație.*

Fie  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  o diviziune oarecare a intervalului  $[a, b]$  și fie  $m_i$  (respectiv  $M_i$ ) marginea inferioară (superioară) a funcției  $f$  pe intervalul  $[x_{i-1}, x_i]$ . Dacă notăm cu

$$E_\Delta = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i], \text{ atunci } E_\Delta \in \mathcal{E},$$

$$E_\Delta \subset \Gamma_f \text{ și}$$

$$\text{aria}(E_\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) = s_\Delta \text{ unde cu}$$

$s_\Delta$  am notat suma Darboux inferioară.

Rezultă că  $s_\Delta \leq S_*(\Gamma_f)$ .

În mod analog, dacă notăm cu

$$F_\Delta = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i], \text{ atunci } F_\Delta \in \mathcal{E},$$

$$F_\Delta \supset \Gamma_f \text{ și } \text{aria}(F_\Delta) = S_\Delta \geq S^*(\Gamma_f).$$

Așadar avem:

$$(3)$$

$$s_\Delta \leq S_*(\Gamma_f) \leq S^*(\Gamma_f) \leq S_\Delta$$

Faptul că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  implică:  $I_* = \sup_\Delta s_\Delta = \inf_\Delta S_\Delta = I^* = \int_a^b f(x) dx$ .

În sfârșit, din (3) rezultă  $S_*(\Gamma_f) = S^*(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx$  și cu aceasta teorema este demonstrată.

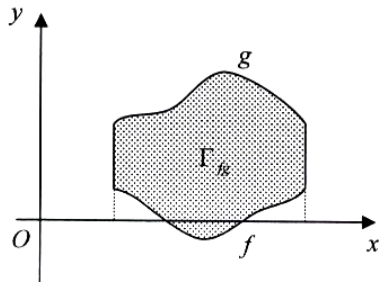


Fig. 6

Fie  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$  două funcții cu proprietatea  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$  și fie  $\Gamma_{fg} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ .

**Corolarul 5.1.1.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ , atunci mulțimea  $\Gamma_{fg}$  are arie

$$\text{și } \text{aria}(\Gamma_{fg}) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

**Exemplul 5.1.1.** Să se calculeze aria elipsei.

Ecuția elipsei este  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ . Din motive de simetrie este suficient să calculăm un sfert din aria elipsei, de exemplu aria mulțimii hașurate în figura 6.

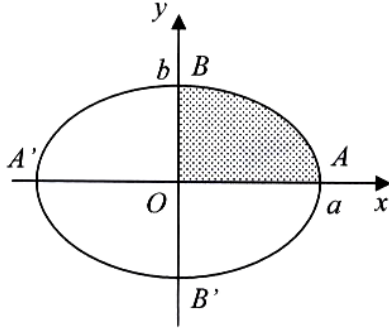


Fig. 7

Arcul  $\overline{BA}$  este graficul funcției  
 $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $x \in [0, a]$ .

Conform Propoziției 5.1.1 avem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{aria}(\text{elipsei}) &= \int_0^a f(x) dx = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\ &= \frac{b}{a} \left( \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right) \Bigg|_0^a = \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

Așadar aria elipsei de

semiaxe  $a$  și  $b$  este egală cu  $\pi ab$ .

**Teorema 5.1.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime mărginită. Condiția necesară și suficientă ca mulțimea  $A$  să aibă arie este ca pentru orice  $\varepsilon > 0$  să existe două mulțimi elementare  $E_\varepsilon$  și  $F_\varepsilon$  cu proprietățile:  $E_\varepsilon \subset A \subset F_\varepsilon$  și  $\text{aria}(F_\varepsilon) - \text{aria}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ .

*Demonstrație*

**Necesitatea:** Dacă  $S_*(A) = S^*(A) = S(A)$ , atunci din definiția marginii superioare (inferioare) rezultă că există  $E_\varepsilon \in \mathbf{E}$ ,  $E_\varepsilon \subset A$  astfel încât  $S(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \text{aria}(E_\varepsilon)$  și există  $F_\varepsilon \in \mathbf{E}$ ,  $F_\varepsilon \supset A$  astfel încât  $\text{aria}(F_\varepsilon) < S(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ . Așadar, avem  $\text{aria}(F_\varepsilon) - \text{aria}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ .

**Suficiența.** Dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $E_\varepsilon, F_\varepsilon \in \mathbf{E}$  cu proprietățile:  $E_\varepsilon \subset A \subset F_\varepsilon$  și  $\text{aria}(F_\varepsilon) - \text{aria}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ , atunci avem:  $0 \leq S^*(A) - S_*(A) < \varepsilon$ . Cum  $\varepsilon > 0$  a fost arbitrar, rezultă că  $S^*(A) = S_*(A)$ , deci  $A$  are arie.

**Definiția 5.1.4.** Spunem că mulțimea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  este de arie zero dacă poate fi inclusă într-o mulțime elementară de arie oricât de mică. Cu alte cuvinte, dacă  $\forall \varepsilon > 0$  există o mulțime elementară  $F \supset \Gamma$  cu  $\text{aria}(F) < \varepsilon$ . În particular avem  $S^*(\Gamma) = 0$  și cum  $0 \leq S_*(\Gamma) \leq S^*(\Gamma)$  rezultă că  $\Gamma$  are arie și că  $\text{aria}(\Gamma) = 0$ . Cu această definiție Teorema 5.1.1. se poate reformula astfel:

**Teorema 5'.1.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime mărginită. Condiția necesară și suficientă ca mulțimea  $A$  să aibă arie este ca frontiera sa  $\Gamma$  să fie de arie zero.

*Demonstrație.*

Dacă  $A$  are arie, atunci  $\forall \varepsilon > 0, \exists E_\varepsilon, F_\varepsilon \in \mathbf{E}$  cu proprietățile  $E_\varepsilon \subset A \subset F_\varepsilon$  și  $\text{aria}(F_\varepsilon \setminus E_\varepsilon) = \text{aria}(F_\varepsilon) - \text{aria}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ . Cum  $\Gamma = \text{fr}.A \subset F_\varepsilon \setminus \overset{\circ}{E}_\varepsilon$  și  $F_\varepsilon \setminus \overset{\circ}{E}_\varepsilon$  este de asemenea o mulțime elementară, rezultă că  $\Gamma$  este de arie zero.

Afirmația reciprocă rezultă din Observația că orice mulțime elementară care conține frontiera  $\Gamma$  a mulțimii  $A$  se poate scrie ca diferența a două mulțimi elementare  $F \setminus E$  cu  $E \subset A \subset F$ .

**Corolarul 5.1.2.** *Graficul oricărei funcții continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{P}$  este o mulțime de arie zero.*

Într-adevăr, funcția  $f$  fiind continuă, este integrabilă și conform Propoziției 5.1.1 subgraficul său are arie. Afirmația rezultă acum din Teorema 5'.1.1.

**Corolarul 5.1.3.** *Orice mulțime plană a cărei frontieră este o reuniune finită de grafice de funcții continue, are arie. (Afirmația rezultă din Corolarul 5.1.2, din observația că o reuniune finită de mulțimi de arie zero este de asemenea de arie zero și din Teorema 5'.1.1).*

**Teorema 5''1.1.** *O mulțime mărginită  $A \subset \square^2$  are arie dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există două mulțimi elementare poligonale  $P_\varepsilon$  și  $Q_\varepsilon$  cu proprietățile:  $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$  și  $\text{aria} Q_\varepsilon - \text{aria} P_\varepsilon < \varepsilon$ .*

Afirmația rezultă din Propoziția 5.1.1 și din Teorema 5.1.1.

**Observația 5.1.4.** Orice disc (mulțime plană a cărei frontieră este un cerc) are arie.

Într-adevăr, dacă notăm cu  $P_n$  (respectiv  $Q_n$ ) mulțimea poligonală a cărei frontieră este poligonul regulat cu  $n$  laturi înscris (respectiv circumscris) în cerc, atunci  $\text{aria} Q_n - \text{aria} P_n$  este oricât de mică pentru  $n$  suficient de mare.

În continuare notăm cu  $(\theta, \rho)$  coordonatele polare în plan.

**Propoziția 5.1.3.** *Fie  $\rho = \rho(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$  o funcție continuă și fie*

$$A = \{(\theta, \rho) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\theta)\}. \text{ Atunci } A \text{ are arie și } \text{aria} A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta.$$

*Demonstrație*

Fie  $\Delta_n : \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{i-1} < \theta_i < \dots < \theta_n = \beta$  o diviziune echidistantă a intervalului  $[\alpha, \beta]$ .

Fie  $m_i$  (respectiv  $M_i$ ) marginea inferioară (superioară) a funcției  $\rho = \rho(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ . Aria sectorului de cerc  $OR_iP_i = \{(\theta, \rho) \mid \theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i, 0 \leq \rho \leq \rho(\theta)\}$

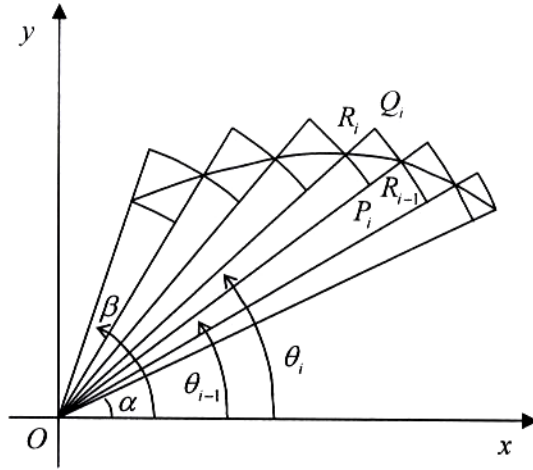


Fig. 8

este egală cu  $\frac{1}{2}m_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$ , iar aria sectorului de cerc  $OQ_iR_{i-1}$  este egală cu  $\frac{1}{2}M_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$ .

Dacă notăm cu  $P_n$  (respectiv  $Q_n$ ) reuniunea celor  $n$  sectoare de cerc  $OR_iP_i$  (respectiv  $OQ_iR_{i-1}$ ) atunci

$P_n \subset A \subset Q_n$  și

aria  $P_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$  iar

aria  $Q_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}M_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$ .

Observăm că cele două sume sunt sumele Darboux asociate funcției  $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$  și diviziunii  $\Delta_n$ . Ținând seama că  $\|\Delta_n\| = \frac{\beta - \alpha}{n} \rightarrow 0$  și funcția  $\frac{1}{2}\rho^2$  este integrabilă pe  $[\alpha, \beta]$ , rezultă că există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } Q_n = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta \quad (4)$$

Pe de altă parte, deoarece  $P_n$  (respectiv  $Q_n$ ) are arie pentru  $\forall \varepsilon > 0$  există o mulțime elementară  $E_n$  (respectiv  $F_n$ ),  $E_n \subset P_n \subset A \subset Q_n \subset F_n$  astfel încât  $\text{aria } P_n - \text{aria } E_n < \frac{\varepsilon}{3}$  și  $\text{aria } F_n - \text{aria } Q_n < \frac{\varepsilon}{3}$ . În plus, ținând seama de (4) putem presupune că  $\text{aria } Q_n - \text{aria } P_n < \frac{\varepsilon}{3}$ . Așadar, avem  $\text{aria } F_n - \text{aria } E_n < \varepsilon$ , deci mulțimea  $A$  are arie și  $\text{aria } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$ .

**Teorema 5.1.2.** *Suportul unei curbe rectificabile este o mulțime de arie zero.*



*Demonstrație.*

Fie  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  drumul parametrizat rectificabil care determină curba  $\gamma$ , definit prin  $r(t) = (x(t), y(t))$ . Fie  $L$  lungimea acestui drum și fie  $x = \tilde{x}(s)$ ,  $y = \tilde{y}(s)$ ,  $s \in [0, L]$  reprezentarea sa naturală (Vezi Cap. 4, §4.3).

Fie  $\Delta_n : 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{i-1} < s_i < \dots < s_n = L$  o diviziune echidistantă a intervalului  $[0, L]$  și fie  $M_i$  punctul de coordonate  $(\tilde{x}(s_i), \tilde{y}(s_i))$  de pe suportul curbei  $\gamma$ . Lungimea arcului  $\overline{M_{i-1}M_i}$  este  $\frac{L}{n}$ . Considerăm un pătrat  $D_i$  cu centrul în  $M_i$  și laturile paralele cu axele de coordonate, de latură  $\frac{2L}{n}$ . Este evident că suportul curbei  $\gamma$  (imaginea funcției vectoriale  $r$ ) este inclus în  $\bigcup_{i=0}^n D_i$  și

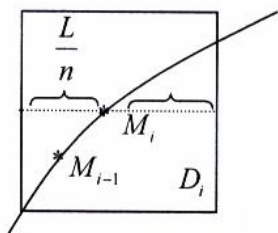


Fig. 9

$$\text{aria}\left(\bigcup_{i=0}^n D_i\right) \leq \sum_{i=0}^n \text{aria}(D_i) = (n+1) \frac{4L^2}{n^2}. \text{ Cum}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \frac{4L^2}{n^2} = 0, \text{ pentru } n \text{ suficient de mare, aria}$$

$$\text{mulțimii } \bigcup_{i=0}^n D_i \text{ este oricât de mică, deci suportul}$$

curbei  $\gamma$  este o mulțime de arie zero.

Din Teoremele 5'.1.1 și 5.1.2 rezultă:

**Corolarul 5.1.4.** *Orice mulțime plană mărginită a cărei frontieră este o reuniune finită de curbe rectificabile are arie.*

**Corolarul 5.1.5.** *Orice mulțime mărginită a cărei frontieră este netedă pe porțiuni are arie.*

Afirmația rezultă din Teorema 4.2.1 și Corolarul 5.1.4.

**Propoziția 5.1.2.** *Dacă  $A_1$  și  $A_2$  sunt două mulțimi care au arie și nu au puncte interioare comune, atunci reuniunea lor  $A = A_1 \cup A_2$  are arie și*  

$$\text{aria}(A) = \text{aria}(A_1) + \text{aria}(A_2).$$

*Demonstrație.* Deoarece frontiera lui  $A$  este inclusă în reuniunea frontierelor lui  $A_1$  și  $A_2$  și acestea sunt de arie zero, rezultă că și  $\text{fr}A$  este de arie zero, deci  $A$  are arie.

Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există mulțimile elementare  $E_i, F_i, i = 1, 2$  cu proprietățile:  $E_1 \subset A_1 \subset F_1, E_2 \subset A_2 \subset F_2$ ,  $\text{aria}(F_1) - \text{aria}(E_1) < \varepsilon$ ,  $\text{aria}(F_2) - \text{aria}(E_2) < \varepsilon$ .

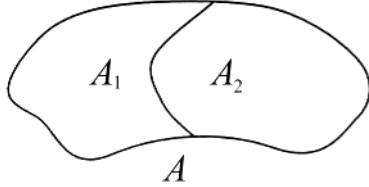


Fig. 10

Avem  
 $\text{aria } E_1 + \text{aria } E_2 \leq \text{aria } A \leq \text{aria}(F_1 \cup F_2) \leq$   
 $\leq \text{aria } F_1 + \text{aria } F_2$   
 și  
 $\text{aria } E_1 + \text{aria } E_2 \leq \text{aria } A_1 + \text{aria } A_2 \leq$   
 $\leq \text{aria } F_1 + \text{aria } F_2$

Aceste inegalități implică

$$|\text{aria } A - (\text{aria } A_1 + \text{aria } A_2)| \leq \text{aria } F_1 - \text{aria } E_1 + \text{aria } F_2 - \text{aria } E_2 < 2\varepsilon.$$

Cum  $\varepsilon > 0$  a fost arbitrar, rezultă că  $\text{aria } A = \text{aria } A_1 + \text{aria } A_2$ .

## 5.2. INTEGRALA DUBLĂ. DEFINIȚIE. PROPRIETĂȚI

Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime mărginită. Atunci există un cerc care conține mulțimea  $A$ . Rezultă că distanța dintre orice două puncte ale mulțimii  $A$  este mai mică decât diametrul acestui cerc. Așadar, mulțimea  $\{\text{dist}(M, N), M \in A, N \in A\}$  este o mulțime de numere reale pozitive majorată, deci are margine superioară.

**Definiția 5.2.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime mărginită. Se numește diametrul mulțimii  $A$  următorul număr:



Fig. 1

$$d(A) = \text{diam}(A) = \sup \{ \text{dist}(M, N); M \in A, N \in A \}$$

**Definiția 5.2.2.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi din plan. Se numește distanța dintre aceste mulțimi următorul număr

$$d(A, B) = \inf \{ \text{dist}(M, N); M \in A, N \in B \}.$$

Este clar că dacă  $A \cap B \neq \emptyset$  atunci  $d(A, B) = 0$ . Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Într-adevăr, distanța dintre graficul funcției  $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$  și axa  $Ox$  este zero, deși cele două mulțimi sunt disjuncte.

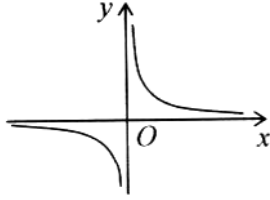


Fig. 2

**Teorema 5.2.1.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi plane închise, mărginite și disjuncte. Atunci  $d(A, B) > 0$ .

*Demonstrație.* Presupunem prin absurd că  $d(A, B) = 0$ . Atunci, pentru  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , există  $P_n \in A$  și  $Q_n \in B$  astfel încât

$$\text{dist}(P_n, Q_n) < \frac{1}{n} \quad (1)$$

Deoarece mulțimea  $A$  este mărginită, rezultă că și șirul  $\{P_n\}$  este mărginit. Din Lema Cesàro deducem că există un subșir  $\{P_{n_k}\}$  convergent. Fie  $P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{n_k}$ . Cum  $A$  este închisă rezultă că  $P \in A$ . Pe de altă parte, din (1) rezultă că subșirul  $\{Q_{n_k}\}$  este de asemenea convergent și limita sa este tot  $P$ . Evident,  $P \in B$ , pentru că  $B$  este închisă. Am ajuns astfel la o contradicție și anume  $P \in A \cap B$ , adică  $A$  și  $B$  nu sunt disjuncte.

În cele ce urmează vom nota cu  $D$  un domeniu compact din  $\mathbb{R}^2$ , adică o mulțime conexă, închisă și mărginită. Presupunem în plus că  $D$  are arie. Aceasta se întâmplă, de exemplu, dacă frontiera lui  $D$  este o reuniune finită de curbe rectificabile. În particular dacă este netedă pe porțiuni.

**Definiția 5.2.3.** Se numește partiție a lui  $D$  orice familie finită de subdomenii  $D_i \subset D$ ,  $i = \overline{1, p}$ , care au arie, nu au puncte interioare comune și  $D = \bigcup_{i=1}^p D_i$ .

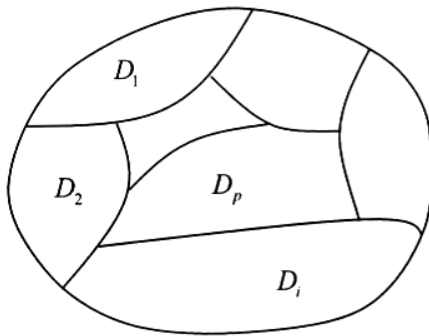


Fig. 3

Dacă notăm cu  $\rho$  partiția  $D_1, D_2, \dots, D_p$  a lui  $D$  atunci norma acestei partiții se definește astfel:  $\|\rho\| = \max \{ \text{diam}(D_i); 1 \leq i \leq p \}$ .

Din Propoziția 5.1.2 rezultă că  $\text{aria } D = \sum_{i=1}^p \text{aria } D_i$ .

**Definiția 5.2.4.** Spunem că partiția  $\rho'$  a domeniului  $D$  este mai fină ca partiția  $\rho$  a acestui domeniu și notăm aceasta cu  $\rho' \succ \rho$ , dacă fiecare subdomeniu al partiției  $\rho$  este o reuniune finită de subdomenii ale partiției  $\rho'$ . Așadar, dacă  $\rho$  este partiția  $(D_i)_{1 \leq i \leq p}$ , atunci

$\rho'$  este de forma  $\{D'_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n_i}}$  și  $D_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} D'_{ij}$ ,  $\forall i = \overline{1, p}$ .

Este evident că dacă  $\rho \prec \rho'$  atunci  $\|\rho\| \geq \|\rho'\|$ . Fie  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_p$  o partiție a domeniului  $D$  și fie  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$  o funcție mărginită. Notăm cu:

$$m = \inf \{ f(x, y) \mid (x, y) \in D \}, \quad M = \sup \{ f(x, y) \mid (x, y) \in D \}$$

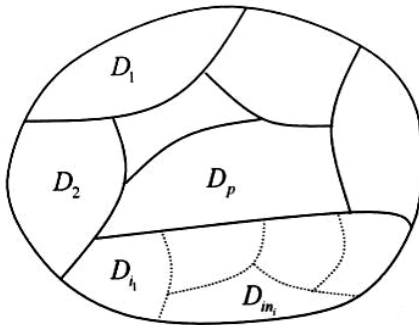


Fig. 4

$$m_i = \inf \{ f(x, y) \mid (x, y) \in D_i \},$$

$$M_i = \sup \{ f(x, y) \mid (x, y) \in D_i \}.$$

Sumele Darboux corespunzătoare funcției  $f$  și partiției  $\rho$  se definesc astfel:

$$s_\rho = \sum_{i=1}^p m_i \text{ aria } D_i \quad \text{și} \quad S_\rho = \sum_{i=1}^p M_i \text{ aria } D_i.$$

Deoarece  $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ ,  $\forall i$  și,

$$\text{aria } D = \sum_{i=1}^p \text{aria } D_i, \text{ rezultă:}$$

$$m(\text{aria } D) \leq s_\rho \leq S_\rho \leq M(\text{aria } D) \quad (2)$$

**Lema 5.2.1.** Dacă  $\rho \prec \rho'$  atunci  $s_\rho \leq s_{\rho'} \leq S_{\rho'} \leq S_\rho$ .

*Demonstrație*

Presupunem că partiția  $\rho$  se compune din domeniile  $(D_i)_{1 \leq i \leq p}$  și partiția  $\rho'$  din domeniile  $\{D'_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n_i}}$ . Cum  $\rho \prec \rho'$  rezultă că pentru orice  $i = \overline{1, p}$  avem

$$D_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} D'_{ij}. \text{ Dacă notăm cu } m'_{ij} = \inf \{ f(x, y) \mid (x, y) \in D'_{ij} \}, \text{ atunci } m'_{ij} \geq m_i,$$

$\forall i = \overline{1, p}, \forall j = \overline{1, n_i}$ . În continuare avem

$$s_\rho = \sum_{i=1}^p m_i \text{ aria } D_i = \sum_{i=1}^p m_i \left( \sum_{j=1}^{n_i} \text{aria } D'_{ij} \right) \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} m'_{ij} \text{ aria } D'_{ij} = s_{\rho'}.$$

Așadar, am arătat că  $s_\rho \leq s_{\rho'}$ . În mod asemănător se arată că  $S_{\rho'} \leq S_\rho$ .

**Lema 5.2.2.** Pentru orice două partiții  $\rho'$  și  $\rho''$  ale domeniului  $D$  avem:

$$s_{\rho'} \leq S_{\rho''}.$$

*Demonstrație*

Să presupunem că partiția  $\rho'$  se compune din subdomeniile  $(D'_i)_{1 \leq i \leq p}$  iar partiția  $\rho''$  din subdomeniile  $(D''_j)_{1 \leq j \leq q}$ . Dacă notăm cu  $\rho$  partiția formată din domeniile  $(D'_i \cap D''_j)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ , atunci  $\rho$  este mai fină și ca  $\rho'$  și ca  $\rho''$ . Din Lema 5.1.2 rezultă:  $s_{\rho'} \leq s_{\rho} \leq S_{\rho} \leq S_{\rho''}$ .

În continuare vom nota cu

$$I_* = \sup \{ s_{\rho} \mid \rho \text{ - partiție a lui } D \} \text{ și } I^* = \inf \{ S_{\rho} \mid \rho \text{ - partiție a lui } D \}.$$

Existența acestor margini rezultă din inegalitățile (2). Din Lema 5.2.2 rezultă că  $I_* \leq I^*$ .

**Definiția 5.2.5.** Spunem că funcția  $f$  este integrabilă pe domeniul  $D$  dacă  $I_* = I^* = I$ . Valoarea comună  $I$  se notează cu  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$  și se numește integrala dublă a funcției  $f$  pe domeniul  $D$ .

**Lema 5.2.3.** Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_{\varepsilon} > 0$  astfel încât pentru orice partiție  $\rho$  a domeniului  $D$  cu  $\|\rho\| < \delta_{\varepsilon}$  avem:  $I_* - \varepsilon < s_{\rho} \leq S_{\rho} < I^* + \varepsilon$ .

*Demonstrație.* Din definiția marginii superioare rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$  există o partiție  $\rho_0$  a domeniului  $D$  astfel încât

$$I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\rho_0} \tag{3}$$

Vom nota cu  $(G_k)_{1 \leq k \leq r}$  elementele partiției  $\rho_0$ , cu  $\Gamma_k$  frontiera mulțimii  $G_k$  și cu  $\Gamma = \bigcup_{k=1}^r \Gamma_k$ . Deoarece  $G_k$  are arie, rezultă că  $\Gamma_k$  este de arie zero. Cum  $\Gamma$  este o reuniune finită de mulțimi mărginite închise, de arie zero, rezultă că  $\Gamma$  este o mulțime închisă, mărginită de arie zero.

Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o mulțime elementară  $E$  cu proprietățile  $\Gamma \subset E$  și aria  $E < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ , unde  $M$  și  $m$  sunt marginile funcției  $f$  pe  $D$ . Dacă notăm cu  $C$  frontiera mulțimii elementare  $E$ , atunci  $C$  este o mulțime închisă mărginită și putem presupune că  $\Gamma \cap C = \emptyset$ . Din Teorema 5.2.1 rezultă că  $\text{dist}(C, \Gamma) = \delta_{\varepsilon} > 0$ . Fie  $\rho: (D_i)_{1 \leq i \leq p}$  o partiție a domeniului  $D$  cu  $\|\rho\| < \delta_{\varepsilon}$ . Să observăm că elementele partiției  $\rho$  sunt de două feluri și anume: Dacă  $D_i \cap \Gamma \neq \emptyset$  atunci  $D_i \subset E$ ; dacă  $D_i \cap \Gamma = \emptyset$  atunci există o singură mulțime  $G_k$  astfel încât  $D_i \subset G_k$ . Dacă

$I = \{1, 2, \dots, p\}$ , atunci notăm cu  $I_1 = \{i \in I \mid D_i \cap \Gamma \neq \emptyset\}$  și cu  $I_2 = I \setminus I_1$ . Așadar, dacă  $i \in I_1$  avem  $D_i \subset E$  și dacă  $i \in I_2$  există un  $\kappa$  (unic) astfel încât  $D_i \subset G_\kappa$ . Fie  $\tilde{\rho}$  partiția formată din mulțimile  $(D_i \cap G_\kappa)_{i, \kappa}$ .

Din cele de mai sus rezultă că elementele lui  $\tilde{\rho}$  sunt de forma  $(D_i \cap G_\kappa)_{i \in I_1, \kappa=1, r}$  și  $\{D_j\}_{j \in I_2}$ .

$$\begin{aligned} \text{În continuare avem } s_{\tilde{\rho}} - s_{\rho} &= \sum_{i \in I_1} \sum_{\kappa=1}^r \tilde{m}_{i\kappa} \text{aria}(D_i \cap G_\kappa) - \sum_{i \in I_1} m_i \text{aria}(D_i) \leq \\ &\leq \sum_{i \in I_1} M \text{aria } D_i - \sum_{i \in I_1} m \text{aria } D_i \leq (M - m) \text{aria } E < (M - m) \frac{\varepsilon}{2(M - m)} = \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Așadar} \\ s_{\tilde{\rho}} &< s_{\rho} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Pe de altă parte, din Lema 5.2.1 rezultă că  $s_{\rho_0} \leq s_{\tilde{\rho}}$ , deoarece  $\rho_0 \prec \tilde{\rho}$ . Ținând seama acum de (3) și (4) obținem:

$$I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\rho_0} \leq s_{\tilde{\rho}} < s_{\rho} + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ deci } I_* - \varepsilon < s_{\rho}.$$

Cealaltă inegalitate din enunț se demonstrează asemănător.

**Teorema 5.2.2** (Darboux) *Fie  $D$  un domeniu compact care are arie și  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$  o funcție mărginită. Condiția necesară și suficientă ca  $f$  să fie integrabilă pe  $D$  este ca pentru orice  $\varepsilon > 0$  să existe  $\delta_\varepsilon > 0$  cu proprietatea că pentru orice partiție  $\rho$  a lui  $D$  cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  să avem  $S_\rho - s_\rho < \varepsilon$ .*

*Demonstrație.*

**Necesitate.** Prin ipoteză  $I_* = I^* = I$ . Din Lema 5.2.3 rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$ , există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall \rho$  partiție a lui  $D$  cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  avem

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s_\rho \leq S_\rho < I + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ deci } S_\rho - s_\rho < \varepsilon.$$

**Suficiență.** Prin ipoteză  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $S_\rho - s_\rho < \varepsilon$  pentru orice partiție  $\rho$  cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ . Din inegalitățile  $s_\rho \leq I_* \leq I^* \leq S_\rho$  deducem  $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$ . Cum  $\varepsilon > 0$  este arbitrar rezultă  $I^* - I_* = 0$ , deci  $f$  este integrabilă pe  $D$ .

**Teorema 5.2.3.** *Orice funcție continuă pe  $D$  este integrabilă pe  $D$ .*

*Demonstrație.* Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$  continuă și fie  $\rho: D_1, \dots, D_p$  o partiție oarecare a lui  $D$ . Atunci avem:

$$S_\rho - s_\rho = \sum_{i=1}^p (M_i - m_i) \text{aria } D_i.$$

Din continuitatea lui  $f$  rezultă pe de o parte că  $f$  este mărginită și își atinge marginile pe fiecare domeniu compact  $D_i$ , iar pe de altă parte că  $f$  este uniform continuă pe  $D$ . Fie  $(\xi'_i, \eta'_i) \in D_i$  astfel încât  $m_i = f(\xi'_i, \eta'_i)$  și fie  $(\xi''_i, \eta''_i) \in D_i$  astfel încât  $M_i = f(\xi''_i, \eta''_i)$ .

Din continuitatea uniformă rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall (x', y') \in D, (x'', y'') \in D$  cu  $|x' - x''| < \delta_\varepsilon, |y' - y''| < \delta_\varepsilon$  avem

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}.$$

Dacă presupunem acum că  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  va rezulta

$$S_\rho - s_\rho = \sum_{i=1}^p (f(\xi''_i, \eta''_i) - f(\xi'_i, \eta'_i)) \text{aria } D_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i) = \varepsilon.$$

Din Teorema 5.2.2 rezultă că  $f$  este integrabilă pe  $D$ .

**Teorema 5.2.4.** *Dacă  $f$  este mărginită pe  $D$  și continuă pe  $D$  cu excepția eventual a unei mulțimi de arie zero, atunci  $f$  este integrabilă pe  $D$ .*

*Demonstrație.*

Fie  $M > 0$  astfel încât  $|f(x, y)| < M, \forall (x, y) \in D$  și fie  $\varepsilon > 0$  oarecare.

Prin ipoteză există o mulțime elementară  $E$  care conține în interiorul său punctele de discontinuitate ale lui  $f$  și  $\text{aria } E < \frac{\varepsilon}{4M}$ .

Dacă notăm cu  $\tilde{D} = D \setminus E$ , atunci  $\tilde{D}$  este o mulțime închisă și evident mărginită. Cum  $f$  este continuă pe  $\tilde{D}$  rezultă că  $f$  este uniform continuă pe  $\tilde{D}$ , deci  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât oricare ar fi  $(x', y') \in \tilde{D}, (x'', y'') \in \tilde{D}$  cu  $|x' - x''| < \delta_\varepsilon, |y' - y''| < \delta_\varepsilon$  avem  $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{2 \text{aria}(D)}$ . Fie acum  $\rho$  o partiție a lui  $D$  al cărui prim element este  $D_1 = E \cap D$  iar celelalte elemente  $D_2, \dots, D_j$  au diame-trele mai mici ca  $\delta_\varepsilon$ . Dacă calculăm diferența  $S_\rho - s_\rho$  obținem:

$$S_\rho - s_\rho \leq (M_1 - m_1) \text{aria } E + \sum_{i=2}^n (M_i - m_i) \text{aria } D_i <$$

$$< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2 \text{aria } D} \cdot \sum_{i=2}^n \text{aria } D_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cum  $0 \leq I^* - I_* \leq S_\rho - s_\rho < \varepsilon$  și  $\varepsilon > 0$  este arbitrar rezultă că  $I^* = I_*$ , deci  $f$  este integrabilă pe  $D$ .

În continuare vom introduce noțiunea de sumă Riemann. Fie  $\rho: D_1, \dots, D_p$  o partiție a domeniului  $D$  și fie  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  un punct arbitrar,  $\forall i = \overline{1, p}$ . Notăm cu  $(\xi, \eta) = (\xi_i, \eta_i)_{1 \leq i \leq p}$ . Suma Riemann atașată funcției  $f$ , diviziunii  $\rho$  și punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_i)$  se definește astfel:  $\sigma_\rho(f, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^p f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i$ . Cum  $m_i \leq f(\xi_i, \eta_i) \leq M_i$ ,  $\forall i = \overline{1, p}$ , rezultă  $s_\rho \leq \sigma_\rho(f, \xi, \eta) \leq S_\rho$ ,  $\forall (\xi, \eta)$ .

**Definiția 5.1.6.** Fie  $D$  un domeniu compact și fie  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$  o funcție mărginită. Spunem că  $f$  este integrabilă pe  $D$  (în sensul lui Riemann, pe scurt (R)-integrabilă) dacă există un număr finit  $I$  cu proprietatea că  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât oricare ar fi  $\rho$  partiție a lui  $D$  cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  avem

$$|\sigma_\rho(f, \xi, \eta) - I| < \varepsilon.$$

Numărul  $I$  se numește integrala dublă a funcției  $f$  pe domeniul  $D$  și se folosește notația  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ .

**Observația 5.2.1.** Pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $(\alpha_i, \beta_i) \in D$  și  $(\gamma_i, \delta_i) \in D$  astfel încât  $S_\rho - \sigma_\rho(f, \alpha, \beta) < \varepsilon$  și  $\sigma_\rho(f, \gamma, \delta) - s_\rho < \varepsilon$ .

Într-adevăr, din definiția marginii superioare rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$ , există  $(\alpha_i, \beta_i) \in D_i$  astfel încât  $M_i - f(\alpha_i, \beta_i) < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}$ .

În continuare avem:

$$S_\rho - \sigma_\rho(f, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^p (M_i - f(\alpha_i, \beta_i)) \text{aria } D_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \cdot \text{aria } D = \varepsilon.$$

Cealaltă inegalitate se demonstrează în mod analog.

Folosind această observație și procedând ca în demonstrația Teoremei 2.3.2 se arată că cele două definiții ale integralei duble cu sume Riemann și sume Darboux coincid.

De asemenea, se poate demonstra, ca și în cazul integralei simple, că are loc următorul criteriu de integrabilitate.



**Teorema 5.2.5 (Riemann).** Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{P}$  mărginită. Condiția necesară și suficientă ca  $f$  să fie integrabilă pe  $D$ , este să existe un număr real finit  $I$  cu proprietatea că pentru orice șir  $\{\rho_n\}$  de partiție ale lui  $D$ , care satisface condiția

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n\| = 0 \text{ și orice șir } (\xi^{(n)}, \eta^{(n)}) \text{ de puncte intermediare să avem}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\rho_n}(f, \xi^{(n)}, \eta^{(n)}) = I.$$

**Observația 5.2.2.** Din Teorema 5.2.5 și Observația 5.2.1 rezultă că dacă  $f$  este integrabilă pe  $D$ , atunci pentru orice șir  $\{\rho_n\}$  de partiții ale lui  $D$ , care satisface condiția  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n\| = 0$ , avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\rho_n} = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Fie  $\{\rho_n\}$  un șir de partiții ale domeniului  $D$  cu proprietatea  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n\| = 0$ . Subdomeniile partiției  $\rho_n$  care nu au puncte comune cu frontiera lui  $D$ , le numim celule interioare. Reuniunea lor o notăm cu  $P_n$ . Celelalte subdomenii ale partiției  $\rho_n$  le numim celule frontieră și reuniunea lor o notăm cu  $Q_n$ . Evident  $D = P_n \cup Q_n$  și aria  $D = \text{aria } P_n + \text{aria } Q_n$ .

**Observația 5.2.3.**  $\text{aria } D = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } P_n$ .

Într-adevăr, deoarece  $\text{aria } D = \sup \{ \text{aria } E; E \subset D, E \in \mathcal{E} \}$ , rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  o mulțime elementară  $E_\varepsilon \subset D$  astfel încât

$$\text{aria } D < \text{aria } E_\varepsilon + \varepsilon \quad (5)$$

Mulțimea  $E_\varepsilon$  este formată dintr-un număr finit de dreptunghiuri închise, cu laturile paralele cu axele de coordonate. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că mulțimea  $E_\varepsilon$  este disjunctă de frontiera domeniului  $D$ , deoarece, în caz contrar, putem micșora (comprima) această mulțime pe direcția axelor de coordonate, astfel încât mulțimea obținută să fie disjunctă de frontiera lui  $D$  și să satisfacă în continuare (5). Fie  $R$  un dreptunghi oarecare al mulțimii  $E_\varepsilon$ . Conform Teoremei 5.2.1 distanța de la  $R$  la frontiera lui  $D$  este strict pozitivă. Notăm cu  $\delta$  cea mai mică distanță de la frontiera lui  $D$  la dreptunghiurile mulțimii  $E_\varepsilon$  și considerăm o partiție  $\rho_{n_0}$  cu  $\|\rho_{n_0}\| < \delta$ .

Observăm că  $E_\varepsilon \subset P_{n_0}$ , unde  $P_{n_0}$  este reuniunea tuturor celulelor interioare ale partiției  $\rho_{n_0}$ . Într-adevăr, dacă  $M \in E_\varepsilon$ , atunci există un dreptunghi  $R \subset E_\varepsilon$  astfel încât  $M \in R$ . Deoarece distanța de la  $M$  la frontiera lui  $D$  este mai mare ca  $\delta$ ,

punctul  $M$  nu poate aparține nici unei celule frontieră din partiția  $\rho_{n_0}$ , deci aparține unei celule interioare a partiției  $\rho_{n_0}$ , adică a mulțimii  $P_{n_0}$ . Rezultă că

$$\text{aria } D < \text{aria } P_{n_0} + \varepsilon, \text{ deci}$$

$$\text{aria } D = \sup \left\{ \text{aria } P_n; n \in \mathbb{N}^* \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } P_n.$$

În continuare vom evidenția o consecință importantă a Observației 5.2.3 pentru teoria integralei duble. Fie  $\{\rho_n\}$  un șir de partiții ale domeniului  $D$  de normă tinzând la 0. Celulele interioare ale partiției  $\rho_n$  le notăm cu  $D'_{ni}$ , iar celulele frontieră ale lui  $\rho_n$  le notăm cu  $D''_{nj}$ . Avem  $D = P_n \cup Q_n$  unde  $P_n = \bigcup_i D'_{ni}$  și  $Q_n = \bigcup_j D''_{nj}$ .

Din Observația 5.2.3 deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria}(Q_n) = 0 \quad (6)$$

**Observația 5.2.4.** Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție mărginită, integrabilă pe  $D$  și fie  $M'_{ni}$  (respectiv  $M''_{nj}$ ) un punct arbitrar din domeniul  $D'_{ni}$  (respectiv  $D''_{nj}$ ). Atunci avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i f(M'_{ni}) \text{aria}(D'_{ni}) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Într-adevăr, deoarece  $f$  este mărginită pe  $D$ , rezultă că există  $K > 0$  astfel încât  $|f(M)| < K, \forall M \in D$ . În continuare avem:

$$\left| \sum_j f(M''_{nj}) \text{aria}(D''_{nj}) \right| \leq \sum_j |f(M''_{nj})| \text{aria}(D''_{nj}) \leq K \text{aria}(Q_n).$$

Ținând seama de Teorema 5.2.5 și de (6) deducem

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_i f(M'_{ni}) \text{aria}(D'_{ni}) + \sum_j f(M''_{nj}) \text{aria}(D''_{nj}) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i f(M'_{ni}) \text{aria}(D'_{ni}). \end{aligned}$$

### 5.3. PROPRIETĂȚILE INTEGRALEI DUBLE

Proprietățile integralei duble sunt analoage cu proprietățile integralei simple. Lăsăm demonstrațiile în seama cititorului.

$$\mathbf{5.3.1.} \quad \iint_D 1. dx dy = \text{aria } D.$$

**5.3.2.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $D$ , atunci  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$ , funcția  $\alpha f + \beta g$  este integrabilă pe  $D$  și

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy.$$

**5.3.3.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $D$  și  $f(x, y) \leq g(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in D$ , atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

**5.3.4.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $D$ , atunci  $|f|$  este integrabilă pe  $D$  și

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

**5.3.5.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $D$  și notăm cu  $m$  (respectiv  $M$ ) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcției  $f$  pe  $D$ , atunci există  $m \leq \mu \leq M$  astfel încât

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \mu \text{aria } D.$$

Dacă presupunem în plus că  $f$  este continuă pe  $D$ , atunci există un punct  $(\xi, \eta) \in D$  astfel încât

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \text{aria } D.$$

**5.3.6.** Dacă domeniul  $D$  este reuniunea a două domenii compacte  $D_1$  și  $D_2$  care au arie, fără puncte interioare comune și  $f$  este integrabilă pe  $D_1$  și  $D_2$ , atunci  $f$  este integrabilă pe  $D$  și

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

## 5.4. MODUL DE CALCUL AL INTEGRALEI DUBLE

**Definiția 5.4.1.** Un domeniu compact  $D$  se numește **simplu în raport cu axa Oy**, dacă există două funcții continue  $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$  astfel încât  $\varphi(x) < \psi(x)$  pentru orice  $a < x < b$  și

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \right\}.$$

Un astfel de domeniu este reprezentat în figura 1.

În mod analog, un domeniu  $D$  se numește simplu în raport cu axa  $Ox$  dacă există două funcții continue  $u, v: [c, d] \rightarrow \mathbb{P}$  astfel încât  $u(x) < v(x)$  pentru  $c < y < d$  astfel încât

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d; u(x) \leq x \leq v(x) \right\}.$$

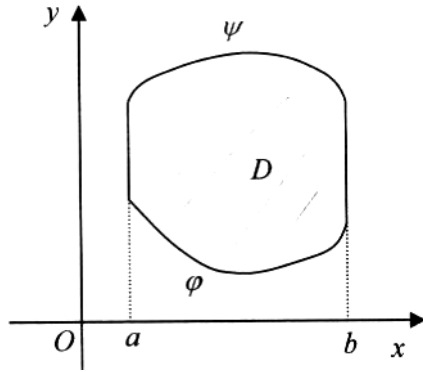


Fig. 1

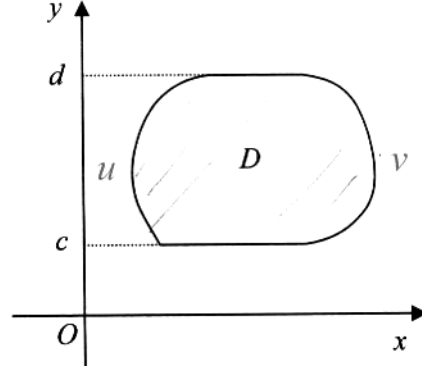


Fig. 2

Un astfel de domeniu este reprezentat în figura 2.

Există domenii compacte care sunt simple în raport cu ambele axe, de exemplu dreptunghiurile, cercurile etc.

**Lema 5.4.1.** Fie  $D$  un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$  și fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe  $D$ .

Dacă notăm cu  $m$  (respectiv  $M$ ) marginile funcției  $f$  pe domeniul  $D$  atunci

$$m(\text{aria } D) \leq \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq M(\text{aria } D).$$

*Demonstrație.*

Pentru început, să observăm că din teorema de continuitate a integralei cu parametru (Teorema 3.2.1) rezultă că funcția  $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$ ,  $x \in [a, b]$ , este continuă pe  $[a, b]$ , deci integrabilă pe  $[a, b]$ . Prin ipoteză avem:

$$m \leq f(x, y) \leq M, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Din proprietatea de monotonie a integralei rezultă:

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} m dy \leq \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \leq \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} M dy, \quad \forall x \in [a, b],$$

sau 
$$m[\psi(x) - \varphi(x)] \leq \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \leq M[\psi(x) - \varphi(x)], \quad \forall x \in [a, b].$$

Folosind din nou proprietatea de monotonie a integralei obținem:

$$m \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] dx \leq \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq M \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] dx.$$

Rămâne să observăm că  $\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx = \text{aria } D$  (Corolarul 5.1.1) și cu aceasta lema este demonstrată.

**Teorema 5.4.1.** Fie  $D$  un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$  și  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$  o funcție continuă. Atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

*Demonstrație.* Fie  $\Delta_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ , o diviziune echidistantă a intervalului  $[a, b]$ .

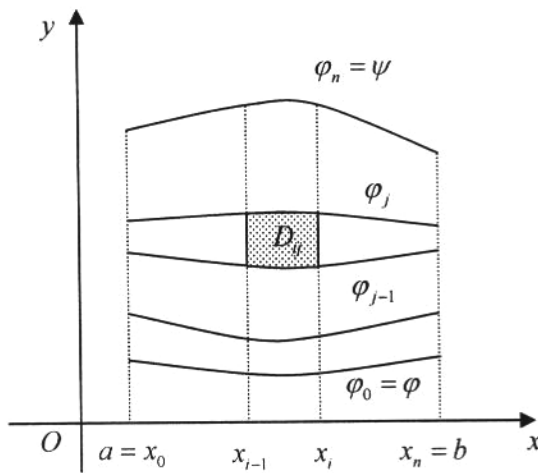


Fig. 3

mile  $(D_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$ , unde

$$D_{ij} = \left\{ (x, y) \in \square^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, \varphi_{j-1}(x) \leq y \leq \varphi_j(x) \right\}.$$

Observăm că  $\text{diam}(D_{ij}) \leq \frac{b-a}{n} + \frac{1}{n} \|\psi - \varphi\|_\infty$ ,  $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$ , de unde deducem că  $\|\rho_n\| \rightarrow 0$  când  $n \rightarrow \infty$ .

Fie  $m_{ij}$  (respectiv  $M_{ij}$ ) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcției  $f$  pe domeniul  $D_{ij}$ . Din Lema 5.4.1 rezultă

$$m_{ij} \text{ aria } D_{ij} \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq M_{ij} \text{ aria } D_{ij}, \quad i, j = \overline{0, n}.$$

Sumând succesiv după  $i$  și  $j$  obținem:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \text{ aria } D_{ij} \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \sum_{j=1}^n \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \text{ aria } D_{ij}.$$

Așadar,

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad \forall i = \overline{1, n} \text{ și}$$

$$\|\Delta_n\| = \frac{b-a}{n}.$$

Considerăm funcțiile

$\varphi_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = \overline{0, n}$  definite astfel:

$$\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{j}{n} [\psi(x) - \varphi(x)],$$

$\forall x \in [a, b]$ . Evident  $\varphi_0 = \varphi$  și  $\varphi_n = \psi$ .

Notăm cu  $\rho_n$  partiția domeniului  $D$  formată din mulți-

Deoarece  $\sum_{j=1}^n \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$  și

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

rezultă:

$$s_{\rho_n} \leq \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq S_{\rho_n} \quad (1)$$

Cum  $f$  este integrabilă pe  $D$ , din Observația 5.2.2 rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\rho_n} = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Trecând la limită după  $n$  în inegalitățile (1) obținem

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

**Observația 5.4.1.** Dacă domeniul  $D$  este simplu în raport cu axa  $Ox$ , avem următoarea formulă de calcul

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Exemplul 5.4.1.** Să se calculeze  $\iint_D x^2 y dx dy$  unde  $D$  este domeniul mărginit

de curbele  $y = x^2$ ,  $y = 1$ . Observăm că domeniul  $D$  este simplu în raport cu axa

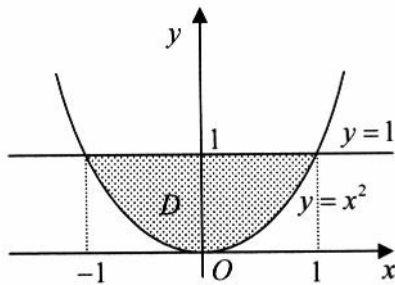


Fig. 4

$$Oy: D = \{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 \}.$$

Conform Teoremei 5.1.1. avem:

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y dx dy &= \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left( x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^1 \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - x^6) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, este ușor de observat că domeniul  $d$  este simplu și în raport cu axa  $Ox$ . Într-adevăr  $D = \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \}$ . Așadar avem

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y \, dx \right) dy = \int_0^1 \left( y \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \right) dy = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 \sqrt{y} \, dy = \frac{2}{3} \frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

### 5.5. SCHIMBAREA VARIABILELOR ÎN INTEGRALA DUBLĂ

Fie  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domeniu mărginit care are arie, fie funcția vectorială  $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definită prin  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  și fie  $D \subset \mathbb{R}^2$  imaginea directă a domeniului  $\Omega$  prin funcția vectorială  $F$ . Presupunem că funcția  $F$  are următoarele proprietăți:

- (i)  $F$  este de clasă  $C^1$  pe  $\bar{\Omega}$ .
- (ii)  $F : \Omega \rightarrow D$  este bijectivă.
- (iii) Transformarea  $F$  este o transformare regulată pe  $\Omega$ , adică iacobianul său  $\det J_F(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \neq 0$ ,  $\forall (u, v) \in \Omega$ .

În aceste condiții rezultă că  $\bar{D} = F(\bar{\Omega})$  este la rândul său un domeniu compact și că iacobianul transformării  $F$  păstrează semn constant pe  $\Omega$ . O astfel de funcție vectorială se mai numește și schimbare de coordonate sau schimbare de variabile.

**Observația 5.5.1.** O schimbare de variabile transformă o curbă netedă pe porțiuni din domeniul  $\Omega$ , într-o curbă netedă pe porțiuni din domeniul  $D$ . Fie  $\gamma \subset \Omega$  o curbă netedă și fie  $\rho(t) = (u(t), v(t))$ ,  $t \in [a, b]$  o reprezentare parametrică a sa. Dacă notăm cu  $C = F(\gamma)$ , atunci  $r(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)))$ ,  $t \in [a, b]$  este o reprezentare parametrică a curbei  $C \subset D$ . Ținând seama de formulele de calcul pentru derivatele parțiale ale funcțiilor compuse obținem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}[u(t), v(t)] \cdot u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}[u(t), v(t)] \cdot v'(t) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}[u(t), v(t)] \cdot u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v}[u(t), v(t)] \cdot v'(t) \end{cases}$$

Dacă presupunem, prin absurd că  $C$  nu este netedă, rezultă că există  $t_0 \in (a, b)$  astfel încât  $\frac{dx}{dt}[u(t_0), v(t_0)] = 0$  și  $\frac{dy}{dt}[u(t_0), v(t_0)] = 0$ , deci

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}[u(t_0), v(t_0)] \cdot u'(t_0) + \frac{\partial x}{\partial v}[u(t_0), v(t_0)] \cdot v'(t_0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}[u(t_0), v(t_0)] \cdot u'(t_0) + \frac{\partial y}{\partial v}[u(t_0), v(t_0)] \cdot v'(t_0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Cum prin ipoteză  $(u'(t_0))^2 + (v'(t_0))^2 > 0$ , rezultă că sistemul (1) admite soluție nebanală. Așadar, avem:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}[u(t_0), v(t_0)] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}[u(t_0), v(t_0)] & \frac{\partial x}{\partial v}[u(t_0), v(t_0)] \\ \frac{\partial y}{\partial u}[u(t_0), v(t_0)] & \frac{\partial y}{\partial v}[u(t_0), v(t_0)] \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce contrazice faptul că  $F$  este o transformare regulată.

**Observația 5.5.2.** Printr-o schimbare de variabile, orice punct de pe frontiera domeniului  $D$ , corespunde unui punct de pe frontiera domeniului  $\Omega$  și reciproc. Cu alte cuvinte  $F(\text{fr } \Omega) = \text{fr } D$ .

Într-adevăr, să presupunem că  $(x_0, y_0) \in \text{fr } D$  și că există  $(u_0, v_0) \in \Omega$  astfel încât  $x_0 = x(u_0, v_0)$ ,  $y_0 = y(u_0, v_0)$ . Cum transformarea  $F$  este regulată în punctul  $(u_0, v_0)$ , din teorema de inversiune locală rezultă că  $(x_0, y_0)$  este un punct interior domeniului  $D$ , ceea ce este absurd.

În cele ce urmează prezentăm noțiunea de modul de continuitate al unei funcții și principalele sale proprietăți, care vor interveni în demonstrația teoremei schimbării de variabile.

**Definiția 5.5.1.** Fie  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , unde  $A$  este o mulțime oarecare și fie  $\delta > 0$  oarecare. Vom nota cu

$$\omega(\delta, f) = \sup \{ |f(M') - f(M'')|; M', M'' \in A, \text{dist}(M', M'') < \delta \}.$$

Se observă imediat că dacă  $0 < \delta_1 < \delta_2$  atunci  $\omega(\delta_1, f) < \omega(\delta_2, f)$ .

**Observația 5.5.3.** O funcție  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  este uniform continuă pe  $A$ , dacă și numai dacă  $\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \omega(\delta, f) = 0$ .

Într-adevăr, prin ipoteză, pentru  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \eta_\varepsilon > 0$  cu proprietatea că pentru orice  $M', M'' \in A$  cu  $\text{dist}(M', M'') < \eta_\varepsilon$  avem  $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$ . Rezultă că dacă  $0 < \delta < \eta_\varepsilon$ , atunci  $\omega(\delta, f) < \varepsilon$ , deci  $\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \omega(\delta, f) = 0$ . Demonstrația afirmației reciproce este asemănătoare.



**Observația 5.5.4.** Dacă  $A$  este convexă, atunci pentru orice  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  avem  $\omega(\delta_1 + \delta_2, f) \leq \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f)$ . În particular, rezultă

$$\omega(m\delta, f) \leq, \quad \forall \quad m \in \mathbb{Q}^+.$$

Într-adevăr, fie  $M', M'' \in A$  cu  $\text{dist}(M', M'') < \delta_1 + \delta_2$  și fie

$$M = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} M' + \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} M''.$$

Evident  $M$  aparține segmentului de dreaptă de capete

$M'$  și  $M''$ , deci  $M \in A$ , deoarece  $A$  este convexă. În continuare avem:

$$M - M' = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} (M'' - M') \quad \text{și} \quad M'' - M = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} (M'' - M'), \text{ deci}$$

$$\text{dist}(M, M') = \|M - M'\| = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \|M'' - M'\| < \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} (\delta_1 + \delta_2) = \delta_1$$

$$\text{dist}(M, M'') = \|M - M''\| = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \|M'' - M'\| < \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} (\delta_1 + \delta_2) = \delta_2.$$

Așadar,  $\exists M \in A$  astfel încât  $\text{dist}(M, M') < \delta_1$ ,  $\text{dist}(M, M'') < \delta_2$ .

Pentru orice  $M', M'' \in A$  cu  $\text{dist}(M', M'') < \delta_1 + \delta_2$  avem

$$|f(M') - f(M'')| \leq |f(M') - f(M)| + |f(M) - f(M'')| < \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f),$$

deci  $\omega(\delta_1 + \delta_2, f) \leq \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f)$ .

Fie  $F: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$ ,  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  o schimbare de variabile. Notăm cu

$$\omega(h) = \max \left\{ \omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial u}\right); \omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial v}\right); \omega\left(h, \frac{\partial y}{\partial u}\right); \omega\left(h, \frac{\partial y}{\partial v}\right) \right\},$$

unde, de exemplu,  $\omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial u}\right)$  este modulul de continuitate al funcției  $\frac{\partial x}{\partial u}$  pe mulțimea  $\Omega$ , calculat în punctul  $h$ , deci

$$\omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \sup \left\{ \left| \frac{\partial x}{\partial u}(M') - \frac{\partial x}{\partial u}(M'') \right|; M', M'' \in \Omega, \text{dist}(M', M'') < h \right\}.$$

Deoarece  $x, y \in C^1(\bar{\Omega})$ , rezultă că  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$ .

**Lema 5.5.1.** Fie  $F: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$ ,  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  o schimbare de variabile, fie  $\Delta = (a, a+h) \times (b, b+h) \subset \Omega$  și fie  $P = F(\Delta) \subset D$  imaginea directă a pătratului  $\Delta$  prin transformarea  $F$ . Atunci

$$\text{aria } P = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(a, b) \right| \text{aria } \Delta + \varphi(h) \quad \text{unde} \quad |\varphi(h)| \leq Kh^2 \omega(h),$$

$K$  fiind o constantă independentă de  $h$  și de punctul  $A(a,b)$ .

*Demonstrație.*

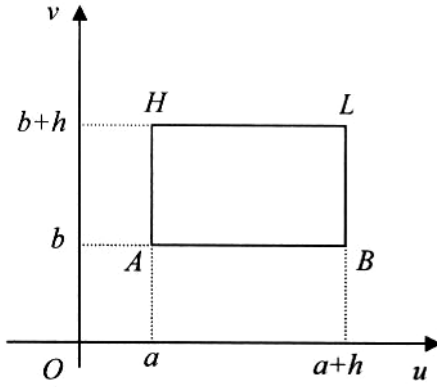


Fig. 1

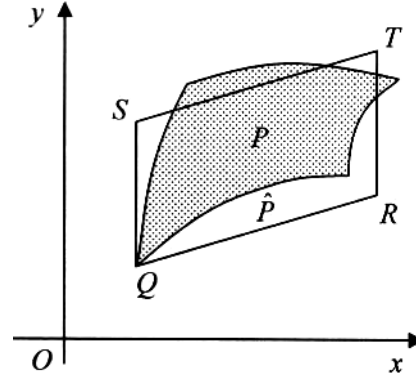


Fig. 2

Fie  $c = x(a,b)$  și  $d = y(a,b)$ . Din Teorema Lagrange rezultă că există două puncte  $(\xi, \eta)$ ,  $(\xi', \eta')$  pe segmentul de dreaptă deschis de capete  $(a,b)$  și  $(u,v)$  astfel încât:

$$\begin{cases} x(u,v) = c + \frac{\partial x}{\partial u}(\xi, \eta)(u-a) + \frac{\partial x}{\partial v}(\xi, \eta)(v-b) \\ y(u,v) = d + \frac{\partial y}{\partial u}(\xi', \eta')(u-a) + \frac{\partial y}{\partial v}(\xi', \eta')(v-b) \end{cases} \quad (2)$$

Dacă notăm cu

$$\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(\xi, \eta) - \frac{\partial x}{\partial u}(a,b) \right)(u-a) + \left( \frac{\partial x}{\partial v}(\xi, \eta) - \frac{\partial x}{\partial v}(a,b) \right)(v-b) \text{ și}$$

$$\beta = \left( \frac{\partial y}{\partial u}(\xi', \eta') - \frac{\partial y}{\partial u}(a,b) \right)(u-a) + \left( \frac{\partial y}{\partial v}(\xi', \eta') - \frac{\partial y}{\partial v}(a,b) \right)(v-b), \text{ atunci}$$

$$\begin{cases} x(u,v) = c + \frac{\partial x}{\partial u}(a,b)(u-a) + \frac{\partial x}{\partial v}(a,b)(v-b) + \alpha \\ y(u,v) = d + \frac{\partial y}{\partial u}(a,b)(u-a) + \frac{\partial y}{\partial v}(a,b)(v-b) + \beta \end{cases} \quad (3)$$

În continuare considerăm transformarea afină

$$\begin{cases} \hat{x}(u,v) = c + \frac{\partial x}{\partial u}(a,b)(u-a) + \frac{\partial x}{\partial v}(a,b)(v-b) \\ \hat{y}(u,v) = d + \frac{\partial y}{\partial u}(a,b)(u-a) + \frac{\partial y}{\partial v}(a,b)(v-b) \end{cases} \quad (4)$$

Fie  $\hat{F}: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$  funcția vectorială  $\hat{F}(u, v) = (\hat{x}(u, v), \hat{y}(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  și fie  $\hat{P} = \hat{F}(\Delta)$  imaginea directă a pătratului  $\Delta$  prin transformarea afină  $\hat{F}$ . Ținând seama de coordonatele vârfurilor  $A, B, H, L$  ale pătratului  $\Delta$  rezultă coordonatele vârfurilor patrulaterului  $\hat{P} = QRST$ , anume

$$Q = \hat{F}(A) = (c, d)$$

$$R = \hat{F}(B) = \left( c + \frac{\partial x}{\partial u}(a, b)h, d + \frac{\partial y}{\partial u}(a, b)h \right)$$

$$T = \hat{F}(L) = \left( c + \frac{\partial x}{\partial u}(a, b)h + \frac{\partial x}{\partial v}(a, b)h, d + \frac{\partial y}{\partial u}(a, b)h + \frac{\partial y}{\partial v}(a, b)h \right)$$

$$S = \hat{F}(H) = \left( c + \frac{\partial x}{\partial v}(a, b)h, d + \frac{\partial y}{\partial v}(a, b)h \right)$$

Se observă că dreptele  $QR$  și  $ST$  sunt paralele și că

$$\|\overrightarrow{QR}\| = \|\overrightarrow{ST}\| = h \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial u}(a, b) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u}(a, b) \right)^2}. \text{ Prin urmare, patrulaterul } QRST \text{ este}$$

un paralelogram. Aria sa este egală cu mărimea produsului vectorial

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(a, b)h & \frac{\partial y}{\partial u}(a, b)h & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}(a, b)h & \frac{\partial y}{\partial v}(a, b)h & 0 \end{vmatrix} = \\ &= h^2 \left( \frac{\partial x}{\partial u}(a, b) \frac{\partial y}{\partial v}(a, b) - \frac{\partial x}{\partial v}(a, b) \frac{\partial y}{\partial u}(a, b) \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Așadar, avem:

$$\text{aria } \hat{P} = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(a, b) \right| h^2 \quad (5)$$

Mai reținem că

$$\|\overrightarrow{QS}\| = \|\overrightarrow{RT}\| = h \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial v}(a, b) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v}(a, b) \right)^2} \quad (6)$$

Să estimăm acum distanța de la un punct oarecare  $M(x, y) \in P$  la punctul corespunzător  $\hat{M}(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{P}$ . Din (3) și (4) rezultă că  $\text{dist}(M, \hat{M}) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . Pe de altă parte, ținând seama de proprietățile modulului de continuitate, pentru  $(u, v) \in \Delta$  obținem

$$|\alpha(u, v)| \leq \omega\left(\sqrt{2}h, \frac{\partial x}{\partial u}\right)h + \omega\left(\sqrt{2}h, \frac{\partial x}{\partial v}\right)h \leq 2\omega(\sqrt{2}h)h \leq 2\omega(2h)h \leq 4\omega(h)h$$

Absolut analog se arată că  $|\beta(u, v)| \leq 4\omega(h)h$ . Așadar, avem:

$$\text{dist}(M, \hat{M}) \leq \sqrt{32\omega^2(h)h^2} \leq 6\omega(h)h = r \quad (7)$$

Notăm cu  $\Gamma$  reuniunea tuturor discurilor de rază  $r$  care au centrul în punctul  $\hat{M}$ , când  $\hat{M}$  parcurge frontiera paralelogramului  $\hat{P}$ . Aria mulțimii  $\Gamma$  este mai mică decât suma ariilor celor patru cercuri de rază  $r$  cu centrele în vârfurile paralelogramului  $\hat{P}$ , plus aria celor patru dreptunghiuri de lățime  $2r$  construite pe laturile paralelogramului  $\hat{P}$ . Rezultă că

$$\text{aria}(\Gamma) \leq 4\pi r^2 + 4r(\|\overline{QR}\| + \|\overline{QS}\|).$$

Deoarece  $x, y \in C^1(\bar{\Omega})$ , rezultă că derivatele lor parțiale de ordinul I sunt mărginite pe  $\bar{\Omega}$ , deci  $\|\overline{QR}\| < K_1 h$ ,  $\|\overline{QS}\| < K_1 h$ , unde  $K_1 > 0$  este o

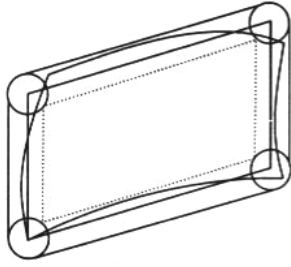


Fig. 3

constantă. Prin urmare avem:

$$\text{aria}(\Gamma) \leq 4\pi 36\omega^2(h)h^2 + 48\omega(h)h^2 K_1 \leq K\omega(h)h^2 \quad (8)$$

unde  $K$  este o constantă pozitivă independentă de  $h$  și de  $A(a, b)$ .

Observăm că  $P \setminus \hat{P} \subset \Gamma$ .

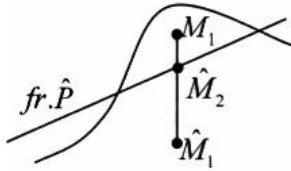


Fig. 4

Într-adevăr, fie  $M_1 \in P \setminus \hat{P}$  și fie  $(u_1, v_1) \in \bar{\Delta}$  astfel încât  $M_1 = F(u_1, v_1)$ . Dacă notăm cu  $\hat{M}_1 = \hat{F}(u_1, v_1)$ , atunci  $\hat{M}_1 \in \hat{P}$  și  $\text{dist}(M_1, \hat{M}_1) < r$ . Cum  $M_1 \notin \hat{P}$ , rezultă că segmentul de dreaptă  $\hat{M}_1 M_1$  întâlnește frontiera lui  $\hat{P}$ .

Fie  $\hat{M}_2 \in \hat{M}_1 M_1 \cap \text{fr.} \hat{P}$ . Avem  $\text{dist}(M_1, \hat{M}_2) < \text{dist}(M_1, \hat{M}_1) < r$ , deci  $M_1 \in \Gamma$ .

În continuare avem:  $P = \hat{P} \cup (P \setminus \hat{P})$  de unde rezultă că:  $\text{aria } P = \text{aria } \hat{P} + \text{aria}(P \setminus \hat{P})$ .

Cum  $\text{aria}(P \setminus \hat{P}) \leq \text{aria } \Gamma$ , deducem că există  $\theta \in (0, 1)$  astfel încât  $\text{aria}(P) = \text{aria}(\hat{P}) + \theta \cdot \text{aria}(\Gamma)$ . Din (5) și (8) obținem

$$\text{aria}(P) = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(a, b) \right| h^2 + \theta \cdot K\omega(h)h^2.$$

În sfârșit, dacă notăm  $\varphi(h) = \theta \cdot K\omega(h)h^2$  atunci  $|\varphi(h)| \leq K \cdot \omega(h)h^2$  și

$$\text{aria}(P) = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(a, b) \right| h^2 + \varphi(h).$$

Cu aceasta lema este demonstrată.

**Teorema 5.5.1.** Fie  $F : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$ ,  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  o schimbare de variabile și fie  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \right| du dv.$$

*Demonstrație.* Fie  $m \in \mathbb{N}^*$  un număr natural oarecare, fie  $h = 2^{-m}$  și fie familiile de drepte  $x = kh$ ,  $y = lh$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ .

Notăm cu  $S_m$  rețeaua de pătrate determinată de aceste drepte și cu  $\rho_m$  parti-

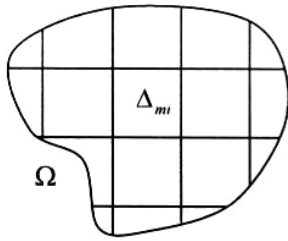


Fig. 5

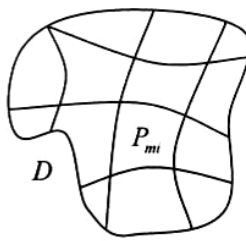


Fig. 6

ția domeniului  $\Omega$  determinată de această rețea.

Fie  $\Delta_{mi}$  un pătrat interior oarecare al rețelei  $S_m$  și fie  $P_{mi} = F(\Delta_{mi})$  imaginea directă a pătratului  $\Delta_{mi}$  prin transformarea  $F$ . Din Lema 5.5.1 rezultă că

$$\text{aria}(P_{mi}) = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(M_{mi}) \right| \text{aria}(\Delta_{mi}) + \psi(h) \cdot \text{aria}(\Delta_{mi}) \text{ unde } |\psi(h)| \leq K\omega(h),$$

iar  $M_{mi}$  este un punct din pătratul  $\Delta_{mi}$ . Dacă notăm cu  $Q_{mi} = F(M_{mi}) \in P_{mi}$  și ținem seama că funcțiile  $f$ ,  $x$  și  $y$  sunt continue și mărginite rezultă

$$\begin{aligned} & \left| \sum_i f(Q_{mi}) \text{aria}(P_{mi}) - \sum_i f[x(M_{mi}), y(M_{mi})] \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(M_{mi}) \right| \text{aria}(\Delta_{mi}) \right| \leq \\ & \leq K'\omega(h) \sum_i \text{aria}(\Delta_{mi}) = K'\omega(h) \text{aria}(\Omega). \end{aligned}$$

Cum funcțiile  $f$  și  $f \circ F$  sunt continue, deci integrabile și  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$ , din

Observația 5.2.4 deducem că

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_i f(Q_{mi}) \text{aria}(P_{mi}) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_i f[x(M_{mi}), y(M_{mi})] \text{aria}(\Delta_{mi}) = \\ &= \iint_{\Omega} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \right| du dv. \end{aligned}$$

Cel mai utilizat tip de schimbare de variabile este trecerea la coordonate polare:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rho > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (9)$$

Dacă notăm cu  $A = \{(\theta, \rho) \mid 0 < \theta < 2\pi, 0 < \rho < \infty\}$ , cu  $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \geq 0\}$  și cu  $F(\theta, \rho) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ , atunci  $F: A \rightarrow B$  este o transformare regulată (iacobianul său  $J_F(\rho, \theta) = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho > 0$ ).

Fie  $0 < \alpha < \beta < 2\pi$  și fie  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Notăm cu  $\Omega = \{(\theta, \rho) \mid \alpha < \theta < \beta; 0 < \rho < \varphi(\theta)\}$  și cu  $D = F(\Omega)$ , atunci  $F: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$  este o schimbare de variabile. Dacă  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă, atunci din Teorema 5.5.1 rezultă:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right) d\theta \end{aligned} \quad (10)$$

Deoarece mulțimea  $\bar{D} \setminus D$  (respectiv  $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ ) este de arie zero, rezultă că este valabilă și egalitatea

$$\iint_{\bar{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{\Omega}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \quad (11)$$

**Exemplul 5.5.1.** Să se calculeze  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , unde

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2, \frac{x}{\sqrt{3}} < y < x\sqrt{3}, x > 0 \right\}.$$

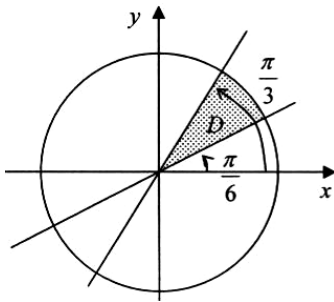


Fig. 7

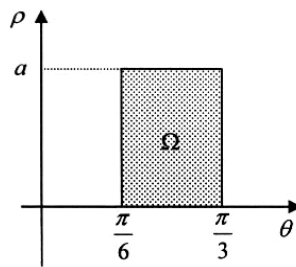


Fig. 8

În acest caz

$\Omega = F^{-1}(D)$  este dreptunghiul  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \times (0, a)$ .

Într-adevăr, înlocuind în inegalitățile care definesc domeniul  $D$  pe  $x$  și  $y$  cu  $\rho \cos \theta$  și  $\rho \sin \theta$  rezultă:

$$\Omega = \left\{ (\theta, \rho) \mid \rho^2 < a^2, \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} < \sin \theta < \sqrt{3} \cos \theta \right\} =$$

$$= \left\{ (\theta, \rho) \mid 0 < \rho < a; \frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{tg} \theta < \sqrt{3} \right\} = \left( \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right) \times (0, a)$$

Așadar, avem

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{\Omega} (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left( \int_0^a \rho^3 d\rho \right) d\theta = \frac{\pi a^4}{24}. \end{aligned}$$

**Exemplul 5.5.2.** Să se calculeze  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , unde

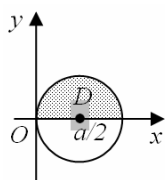


Fig. 9

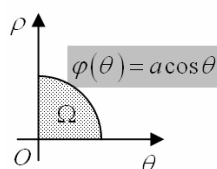


Fig. 10

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 2ax, y > 0 \right\}.$$

Observăm că ecuația  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  este ecuația cercului cu centrul în punctul  $(a, 0)$  și de rază  $r = a$ . Înlocuind  $x$  și  $y$  cu  $\rho \cos \theta$  și  $\rho \sin \theta$  în inegalitățile ce definesc  $D$  obținem

$$\Omega = \left\{ (\theta, \rho) \mid \rho^2 < 2a\rho \cos \theta, \rho \sin \theta > 0 \right\} = \left\{ (\theta, \rho) \mid 0 < \rho < a \cos \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{a \cos \theta} \rho^2 d\rho \right) d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = \frac{2a^3}{9} \end{aligned}$$

**Exemplul 5.5.3.** Să se calculeze  $\iint_D (y - x + 2) dx dy$ , unde

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}. \text{ Ecuația } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ este ecuația unei elipse de semiaxe}$$

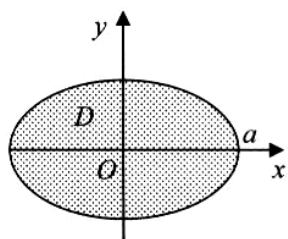


Fig. 11

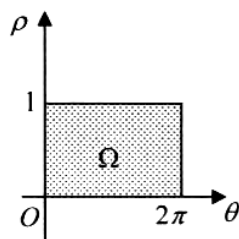


Fig. 12

$a$  și  $b$ . În acest caz se folosesc coordonate polare generalizate și anume

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases}$$

$$0 < \rho < 1 \text{ și } 0 < \theta < 2\pi.$$

Iacobianul transformării este  $ab\rho$ .

$$\begin{aligned} \iint_D (y-x+2) dx dy &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (b\rho \sin \theta - a\rho \cos \theta + 2) ab\rho \right) d\rho d\theta = \\ &= ab^2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 d\theta - a^2b \int_0^{2\pi} \cos \theta \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 d\theta + 2ab \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^1 d\theta = 2\pi ab. \end{aligned}$$

## 5.6. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DUBLE ÎN GEOMETRIE ȘI MECANICĂ

O primă aplicație a integralei duble în geometrie a fost evidențiată în proprietățile integralei duble și anume: aria  $D = \iint_D 1 \cdot dx dy$ , unde  $D \subset \mathbb{R}^2$ , este un domeniu mărginit care are arie.

Fie  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție integrabilă, fie  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$  o partiție a domeniului  $D$  și fie  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  un punct arbitrar. Reamintim că:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i,$$

sensul exact fiind următorul:

Pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încât, oricare ar fi partiția  $\rho$  a domeniului  $D$ , cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  și oricare ar fi punctele intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ , avem:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i - I \right| < \varepsilon.$$

### 5.6.1. Masa unei plăci plane

Prin placă plană înțelegem o placă având forma unui domeniu mărginit  $D \subset \mathbb{R}^2$ , care are arie. Placa este considerată în general neomogenă, densitatea sa fiind dată de funcția continuă  $f: D \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

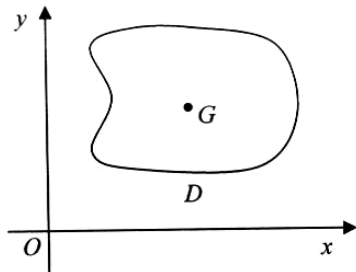


Fig. 1

Fie  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$  o partiție oarecare a domeniului  $D$  și fie  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  arbitrar. Masa plăcii  $D_i$  se aproximează cu produsul  $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria } D_i$ . Aproximarea este cu atât mai bună cu cât norma partiției  $\rho$  este mai mică. Prin urmare avem:

$$\text{masa}(D) \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i \text{ și mai departe:}$$



$$\text{masa}(D) = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

### 5.6.2. Coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane

Fie  $D$  o placă neomogenă de densitățile  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$  și fie  $(x_G, y_G)$  coordonatele centrului său de greutate  $G$ . Considerăm ca mai înainte o partiție  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$  și niște puncte arbitrare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ . Masa plăcii  $D_i$  se aproximează cu produsul  $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria } D_i$ . Dacă vom considera masa plăcii  $D_i$  concentrată într-un singur punct și anume în punctul  $(\xi_i, \eta_i)$ , atunci coordonatele centrului de greutate vor fi:

$$x_G \cong \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}{\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}, \quad y_G \cong \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}{\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}.$$

Presupunând că  $f$  este continuă pe  $D$ , la limită obținem:

$$x_G = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}{\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i} = \frac{\iint_D x f(x, y) dx dy}{\iint_D f(x, y) dx dy}$$

$$y_G = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}{\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i} = \frac{\iint_D y f(x, y) dx dy}{\iint_D f(x, y) dx dy}.$$

În cazul particular al unei plăci omogene ( $f(x, y) = \kappa, \forall (x, y) \in D$ ) rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy} \\ y = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy} \end{array} \right.$$

**Exemplul 5.6.1.** Să se afle coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane omogene care are forma domeniului

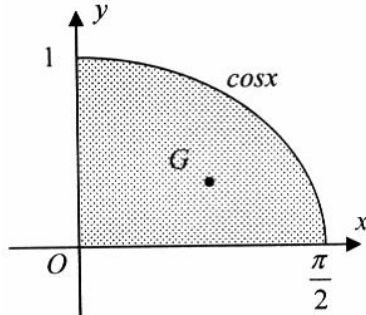


Fig. 2

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \cos x \right\}.$$

Avem

$$\iint_D dx dy = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\cos x} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$$

$$\iint_D x dx dy = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\cos x} x dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} x \cos x dx =$$

$$= x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$\iint_D y dx dy = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\cos x} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{8}.$$

Așadar, avem

$$\begin{cases} x_G = \frac{\pi}{2} - 1 \\ y_G = \frac{\pi}{8} \end{cases}.$$

### 5.6.3. Momentul de inerție al unei plăci plane

Se știe că momentul de inerție al unui punct material în raport cu o anumită axă este egal cu produsul dintre masa punctului și pătratul distanței de la punct la axă. În cazul unui sistem de puncte materiale, momentul de inerție în raport cu o axă este suma momentelor de inerție ale punctelor materiale care formează sistemul.

Fie  $D$  o placă plană de densitate continuă  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , fie  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$  o partiție oarecare a sa și fie  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  oarecare. Aproximăm ca și mai înainte masa plăcii  $D_i$  cu produsul  $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}(D_i)$  și considerăm această masă concentrată în punctul  $(\xi_i, \eta_i)$ . Momentul de inerție al acestui sistem de puncte

materiale în raport cu axa  $Oy$  va fi egal cu suma:  $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}(D_i)$ .

Dacă nrma partiției  $\rho$  este mică, această sumă poate fi considerată ca o valoare aproximativă a momentului de inerție  $I_y$  al plăcii plane  $D$  în raport cu axa  $Oy$ . La limită avem:

$$I_y = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}(D_i) = \iint_D x^2 f(x, y) dx dy.$$

În mod analog momentul de inerție în raport cu axa  $Ox$  este

$$I_x = \iint_D y^2 f(x, y) dx dy.$$

Dacă placa plană este omogenă de densitate  $f(x, y) = 1, \forall (x, y)$  atunci

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy, \quad I_x = \iint_D y^2 dx dy.$$

De asemenea, se poate calcula momentul de inerție al plăcii  $D$  în raport cu originea  $O(0,0)$ . Obținem formulele

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy \text{ respectiv } I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

**Exemplul 5.6.2.** Să se afle momentul de inerție în raport cu axa  $Oy$  (respectiv în raport cu originea) a plăcii plane omogene  $D$  de densitate 1, unde:

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2; x \geq 0, y \geq 0\}$ . Avem

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_D x^2 dx dy = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^r \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho \right) d\theta = \frac{r^4}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{r^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi r^4}{16} \\ I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^r \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4} d\theta = \frac{\pi r^4}{8}. \end{aligned}$$

## 5.7. FORMULA LUI GREEN

Formula lui Green face legătura între integrala dublă și integrala curbilinie de speța a doua.

Fie  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domeniu mărginit a cărui frontieră  $C$  este o curbă netedă pe porțiuni și constă dintr-o reuniune finită de curbe simple închise. Fie  $P, Q: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții continue cu proprietatea că există  $\frac{\partial P}{\partial y}$  și  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  și sunt continue pe  $\bar{D}$ .

Cu aceste precizări formula lui Green este următoarea:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C^{\leftarrow} P dx + Q dy \quad (1)$$

În această formulă orientarea curbei  $C$  (sensul de parcurgere al curbei  $C$ ) este aleasă astfel încât domeniul  $D$  să rămână la stânga.

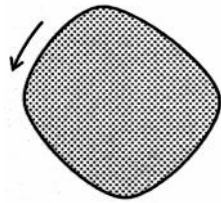


Fig. 1

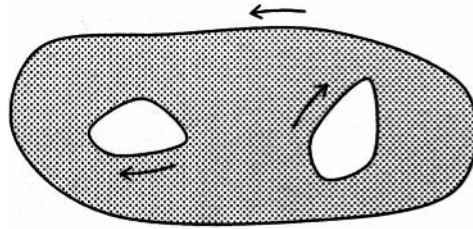


Fig. 2

În figura 1 am exemplificat orientarea curbei  $C = \text{fr}D$  pentru domeniul a cărui frontieră constă dintr-o singură curbă închisă, iar în figura 2 pentru un domeniu a cărui frontieră constă într-o reuniune finită de mai multe curbe închise.

**Definiția 5.7.1** Prin domeniu elementar de tip Green ( $G$  – domeniu elementar) vom înțelege oricare din cele cinci domenii reprezentate în figura 3.

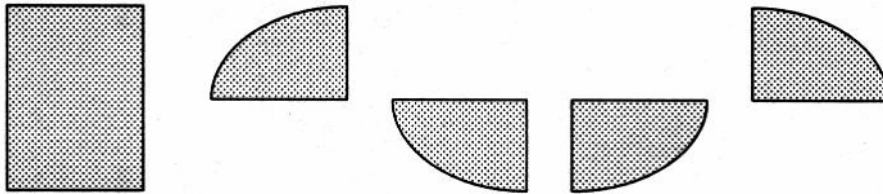


Fig. 3

**Lema 5.7.1** Formula lui Green este verificată pentru orice  $G$ -domeniu elementar.

*Demonstrație.*

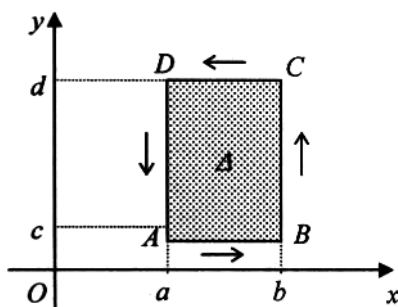


Fig. 4

Pentru început considerăm un domeniu  $\Delta$  a cărei frontieră este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate:

$$\Delta = \{(x, y), a < x < b, c < y < d\}.$$

Putem considera următoarele reprezentări parametrice pentru laturile dreptunghiului:

$$\overline{AB}: x = t, y = c, t \in [a, b]$$

$$\overline{BC}: x = b, y = t, t \in [c, d]$$

$$\overline{DC}: x = t, y = d, t \in [a, b]$$

$$\overline{AD}: x = a, y = t, t \in [c, d].$$

Avem:

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d \left( Q(x, y) \Big|_a^b \right) dx = \int_c^d Q(b, y) dy - \int_c^d Q(a, y) dy \quad (2)$$

Ținând seama de modul de calcul al integralei curbilinii de speța a doua rezultă:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy &= \int_{\overline{CD}} Q(x, y) dy = 0 \\ \int_{\overline{BC}} Q(x, y) dy &= \int_c^d Q(b, t) dt \quad \text{și} \quad \int_{\overline{AD}} Q(x, y) dy = \int_c^d Q(a, t) dt \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Din (2) și (3) deducem

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\overline{BC}} Q dy + \int_{\overline{CD}} Q dy + \int_{\overline{DA}} Q dy + \int_{\overline{AB}} Q dy = \oint_{\text{Fr}\Delta}^{\leftarrow} Q dy \quad (4)$$

În mod analog avem

$$\begin{aligned} -\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = -\int_a^b \left( P(x, y) \Big|_c^d \right) dx = \\ &= -\int_a^b P(x, d) dx + \int_a^b P(x, c) dx \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\overline{BC}} P dx &= \int_{\overline{AD}} P dx = 0 \\ \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx &= \int_a^b P(t, c) dt; \quad \int_{\overline{DC}} P(x, y) dx = \int_c^d P(t, d) dt \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Din (5) și (6) deducem:

$$-\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dx = \int_{\overline{AB}} P dx + \int_{\overline{BC}} P dx + \int_{\overline{CD}} P dx + \int_{\overline{DA}} P dx = \int_{\overleftarrow{\text{Fr}\Delta}} P dx \quad (7)$$

Adunând formulele (4) și (7) obținem formula lui Green.

Să considerăm acum un domeniu G-elementar ca cel din figura 5. Mai precis, un astfel de domeniu se definește astfel:

Fie  $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$  o funcție continuă, strict crescătoare și surjectivă.

$$\Delta = \{(x, y); a < x < b; c < y < f(x)\}.$$

Avem

$$-\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_a^b \left( \int_c^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = -\int_a^b P(x, f(x)) dx + \int_a^b P(x, c) dx \quad (8)$$

Considerând următoarele reprezentări parametrice ale arcului  $\overline{AE}$  și ale segmentelor  $\overline{AB}$  și  $\overline{BE}$ :

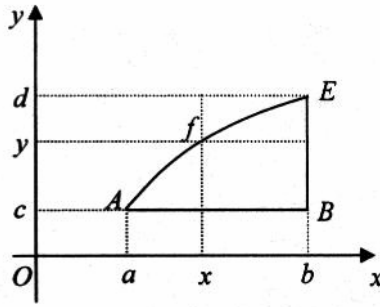


Fig. 5

$$\overline{AE}: x=t, y=f(t), t \in [a, b]$$

$$\overline{AB}: x=t, y=c, t \in [a, b]$$

$$\overline{BE}: x=b, y=t, t \in [c, d]$$

deducem

$$\left. \begin{aligned} \int_{\overline{AE}} P(x, y) dx &= \int_a^b P(t, f(t)) dt; \\ \int_{\overline{AB}} P(x, y) dt &= \int_a^b P(t, c) dt \\ \int_{\overline{BC}} P(x, y) dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Din (8) și (9) rezultă:

$$-\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\overline{AB}} P dx + \int_{\overline{BC}} P dx + \int_{\overleftarrow{\overline{EA}}} P dx = \int_{\overleftarrow{\text{Fr}\Delta}} P dx \quad (10)$$

Pe de altă parte avem:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left( \int_{f^{-1}(y)}^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d \left( Q(x, y) \Big|_{f^{-1}(y)}^b \right) dy = \\ &= \int_c^d Q(b, y) dy - \int_c^d Q[f^{-1}(y), y] dy \end{aligned} \quad (11)$$

De data aceasta, considerând pentru arcul  $\overline{AE}$  reprezentarea parametrică:

$$\overline{AE}: x=f^{-1}(t), y=t, t \in [c, d], \text{ deducem}$$

$$\int_{\overline{AE}} Q(x, y) dy = \int_c^d Q[f^{-1}(t), t] dt \quad (12)$$

Pentru segmentele  $\overline{AB}$  și  $\overline{BE}$  avem:

$$\int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy = 0 \quad \text{și} \quad \int_{\overline{BE}} Q(x, y) dy = \int_c^d Q(b, t) dt \quad (13)$$

Din (11), (12) și (13) rezultă:

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\overline{AB}} Q dy + \int_{\overline{BE}} Q dy + \int_{\overline{EA}} Q dy = \int_{\text{Fr}\Delta}^{\leftarrow} Q dy \quad (14)$$

Adunând formulele (10) și (14) obținem formula lui Green pentru domeniul considerat în figura 5.

Este evident că demonstrațiile formulei lui Green pentru celelalte domenii G-elementare din figura 3 sunt absolut analoage.

**Teorema 5.7.1.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domeniu mărginit a cărui frontieră este netedă pe porțiuni și constă dintr-o reuniune finită de curbe simple închise. Presupunem în plus că domeniul  $D$  este o reuniune finită de G-domenii elementare care nu au puncte interioare comune. Dacă  $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  sunt continue pe  $\overline{D}$ , atunci are loc formula lui Green:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\text{Fr}D}^{\leftarrow} P dx + Q dy.$$

*Demonstrație.*

Să presupunem că  $\overline{D} = \bigcup_{k=1}^m \overline{D}_k$  unde  $\overline{D}_k$  este un G-domeniu elementar,

$\forall k = 1, m$ . (Vezi Fig. 6).

Ținând seama de Lema 5.7.1 rezultă

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{k=1}^m \iint_{D_k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{k=1}^m \int_{\text{Fr}D_k}^{\leftarrow} P dx + Q dy \quad (15)$$

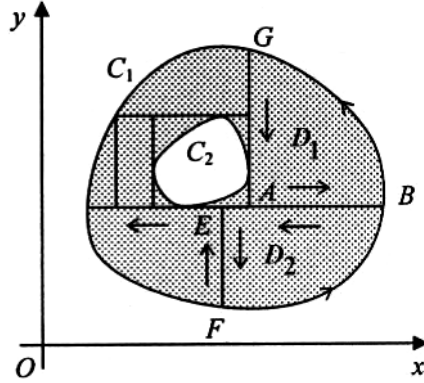


Fig. 6

Frontiera domeniului  $D$  se compune din curbele  $C_1$  și  $C_2$ . Reuniunea frontierelor domeniilor  $D_1, \dots, D_m$  se compune din curbele  $C_1$  și  $C_2$  și un număr finit de segmente de dreaptă incluse în  $D$  paralele cu axele de coordonate. Fiecare asemenea segment de dreaptă face parte din frontierele a două G-domenii elementare vecine. De exemplu  $\overline{AB}$  face parte din frontierele domeniilor  $D_1$  și  $D_2$ . Să observăm că integralele curbilinii

din membrul drept al egalității (15) calculată pe segmentele interioare dispar, deoarece orice astfel de segment este parcurs de două ori în sensuri opuse. De exemplu:

$$\oint_{\text{Fr } D_1}^{\leftarrow} = \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BG}} + \int_{\overline{GA}} \quad \text{și} \quad \oint_{\text{Fr } D_2}^{\leftarrow} = \int_{\overline{FB}} + \int_{\overline{BA}} + \int_{\overline{AE}} + \int_{\overline{EF}}$$

Contribuția segmentului  $\overline{AB}$  în suma  $\oint_{\text{Fr } D_1}^{\leftarrow} + \oint_{\text{Fr } D_2}^{\leftarrow}$  este  $\int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BA}} = 0$ .

Așadar rezultă

$$\sum_{k=1}^m \oint_{\text{Fr } D_k}^{\leftarrow} P dx + Q dy = \oint_{C_1 \cup C_2 = \text{Fr } D}^{\leftarrow} P dx + Q dy \quad (16)$$

Din (15) și (16) deducem:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\text{Fr } D}^{\leftarrow} P dx + Q dy.$$

**Teorema 5.7.2.** *Formula lui Green este valabilă pentru orice domeniu poligonal.*

*Demonstrație.* Deoarece orice domeniu poligonal este o reuniune finită de domenii triunghiulare este suficient să demonstrăm teorema pentru domenii triunghiulare. Fie  $\Delta$  un domeniu triunghiular oarecare de frontieră  $ABC$ . Ducem din



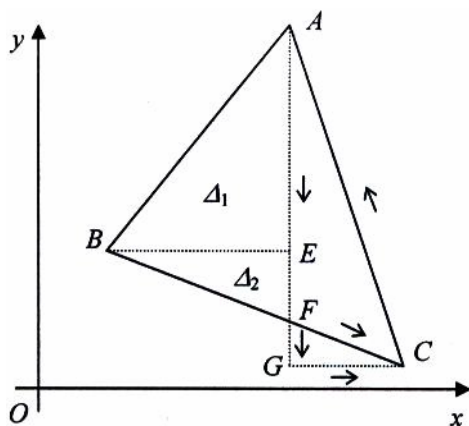


Fig. 7

A o paralelă la  $Oy$ , din  $C$  o paralelă la  $Ox$  și notăm cu  $G$  intersecția lor. De asemenea, ducem prin  $B$  o paralelă la  $Ox$  și notăm cu  $E$  intersecția sa cu dreapta  $AF$ . Domeniul  $\Delta$  este reuniunea domeniilor  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  și  $\Delta_3$ , unde  $\Delta_1$  are frontiera  $ABE$ ,  $\Delta_2$  are frontiera  $BEF$  iar  $\Delta_3$  are frontiera  $AFC$ . Observăm că  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  sunt G-domenii elementare, în timp ce  $\Delta_3$  nu are această proprietate. Este clar însă, că  $\Delta_3$  se poate reprezenta ca diferența a două G-domenii elementare.

Într-adevăr, dacă notăm cu  $\Delta_4$  domeniul de frontieră  $AGC$  și cu  $\Delta_5$  domeniul de frontieră  $FGC$ , atunci  $\Delta_4$  și  $\Delta_5$  sunt G-domenii elementare și  $\Delta_3 = \Delta_4 \setminus \Delta_5$ .

Ținând seama de Lema 5.7.1 rezultă:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_3} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{\Delta_4} - \iint_{\Delta_5} = \int_{AG} + \int_{GC} + \int_{CA} - \left( \int_{AG} + \int_{GC} + \int_{CF} \right) = \int_{AF} + \int_{FC} + \int_{CA} \\ &= \oint_{\text{Fr} \Delta_3}^{\leftarrow} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

Așadar, formula lui Green este variabilă și pe  $\Delta_3$ , deci este variabilă pe  $\Delta$ .

**Observația 5.7.1** Se poate arăta că formula lui Green este variabilă pentru orice domeniu a cărui frontieră este o curbă simplă, închisă, netedă pe porțiuni.

Într-adevăr, se poate arăta că există un șir de linii poligonale  $C_n$ , înscrise în  $C = \text{fr} D$ , astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy.$$

Dacă notăm cu  $D_n$  domeniul mărginit care are frontiera  $C_n$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Din Teorema 5.7.2 rezultă că formula lui Green este valabilă pe  $D_n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Prin trecere la limită, va rezulta că formula lui Green este valabilă și pentru domeniul  $D$ .

**Exemplul 5.7.1.** Să se calculeze  $\oint_{\text{Fr} D}^{\leftarrow} (xy - y) dx + (xy + x) dy$  unde

$$D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

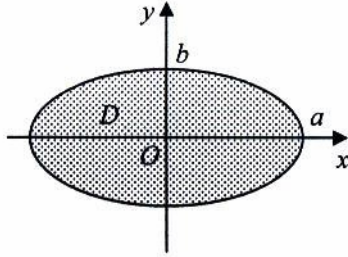


Fig. 8

Dacă notăm cu  $P(x, y) = xy - y$  și cu  $Q(x, y) = xy + x$ , atunci, din formula lui Green rezultă că

$$\begin{aligned} \oint_{\text{Fr} D}^{\leftarrow} (xy - y) dx + (xy + x) dy &= \\ &= \iint_{D_n} (2 + y - x) dx dy. \end{aligned}$$

Fiind vorba de un domeniu elipsoidal vom folosi coordonate polare generalizate și anume

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \rho \in [0, 1].$$

În continuare avem

$$\begin{aligned} \iint_D (2 + y - x) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} (2 + b\rho \sin \theta - a\rho \cos \theta) ab\rho d\theta \right) d\rho = \\ &= 2ab \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi ab. \end{aligned}$$

**Observația 5.7.2** Dacă  $D \subset \mathbb{R}^2$  este un domeniu care are arie și pentru care e valabilă formula lui Green, atunci  $\text{aria}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\text{Fr} D}^{\leftarrow} x dy - y dx$ .

Într-adevăr, dacă notăm cu  $P(x, y) = -\frac{y}{2}$  și cu  $Q(x, y) = \frac{x}{2}$ , atunci

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \text{ Pe de altă parte știm că } \text{aria } D = \iint_D 1 dx dy. \text{ Aplicând acum}$$

formula lui Green rezultă:

$$\text{aria } D = \oint_{\text{Fr} D}^{\leftarrow} P dx + Q dy = \frac{1}{2} \oint_{\text{Fr} D}^{\leftarrow} x dy - y dx.$$

**Exemplul 5.7.2** să se calculeze aria domeniului elipsoidal  $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .

Conform Observației 5.7.2, avem:  $\text{aria}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\text{Fr} D}^{\leftarrow} x \, dy - y \, dx$ .

Fie  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  o reprezentare parametrică a elipsei  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . În continuare avem:

$$\oint_{\text{Fr} D}^{\leftarrow} x \, dy - y \, dx = \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + b \sin t \cdot a \cos t) dt = 2\pi ab,$$

de unde rezultă că aria  $D = \pi ab$ .

**Observația 5.7.3** Se poate arăta că teorema 5.7.1 rămâne valabilă și într-o ipoteză mai slabă referitoare la funcțiile  $P$  și  $Q$  și anume  $P$  și  $Q$  sunt continue pe  $\bar{D}$  iar  $\frac{\partial P}{\partial y}$  și  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  sunt continue și mărginite pe  $D$ .

## 5.8. INTEGRALE DUBLE GENERALIZATE

În acest paragraf introducem noțiunea de integrală dublă generalizată, care acoperă atât cazul când domeniul este nemărginit, cât și cazul când funcția este nemărginită.

Fie  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domeniu mărginit sau nu și fie  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$ , mărginită sau nu. Vom presupune că  $f$  este integrabilă pe orice submulțime a lui  $D$  care are arie.

**Definiția 5.8.1** Spunem că  $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$  este convergentă, dacă pentru

orice șir de domenii mărginite, care au arie,  $\{D_n\}$  cu proprietățile:

(i)  $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$

(ii)  $\bar{D}_n \subset D_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(iii)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy$  e finită și nu depinde de alegerea șirului  $\{D_n\}$ .

În cazul când limita nu există, sau e infinită, spunem că  $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$  este divergentă.

**Teorema 5.8.1.** Dacă  $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$ , atunci  $\iint_D f(x, y) dx dy$  este convergentă dacă și numai dacă există cel puțin un șir  $\{D_n\}$  de domenii mărginite, care au arie, cu proprietățile (i)-(iii), pentru care șirul  $\{a_n\}$ , unde  $a_n = \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$ , este mărginit.

*Demonstrație.* **Necesitatea** este evidentă

**Suficiența.** Fie  $\{D_n\}$  un șir de domenii mărginite care au arie cu proprietățile (i)-(iii) și fie  $a_n = \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$ . Din (i) și din faptul că  $f \geq 0$  pe  $D$ , rezultă că  $\{a_n\}$  este monoton crescător. Cum prin ipoteză  $\{a_n\}$  este mărginit, rezultă că  $\{a_n\}$  este convergent. Fie  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Rămâne să arătăm că  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  este independentă de alegerea șirului  $\{D_n\}$ .

Fie  $\{D'_n\}$  un alt șir de domenii mărginite care au arie, cu proprietățile (i)-(iii) și fie  $a'_n = \iint_{D'_n} f(x, y) dx dy, n \in \mathbb{N}^*$ .

Să observăm că  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  există  $m \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$\bar{D}'_n \subset D_m \quad (1)$$

Într-adevăr, în caz contrar, există un punct  $M_k \in \bar{D}'_n$  astfel încât  $M_k \notin D_k, \forall k \in \mathbb{N}^*$ . Obținem astfel un șir de elemente  $\{M_k\}$  din  $\bar{D}'_n$ . Cum  $\bar{D}'_n$  este mărginită și închisă, rezultă că acest șir conține un subșir  $\{M_{k_m}\}$  convergent. Dacă notăm cu  $M = \lim_{m \rightarrow \infty} M_{k_m}$ , atunci  $M \in \bar{D}'_n \subset D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ . Fie  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $M \in D_{n_1}$ . Cum  $D_{n_1}$  este deschisă, deducem că există o vecinătate  $V$  a punctului  $M$  astfel încât  $V \subset D_{n_1}$ . Pe de altă parte, deoarece  $M_k \rightarrow M$ , rezultă că există un rang  $k_1 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $M_k \in V, \forall k \geq k_1$ . În particular, rezultă că  $M_{k_1} \in V \subset D_{k_1}$ , ceea ce contrazice modul de alegere a punctelor  $M_k$ . Așadar, am demonstrat incluziunea (1). Din (1) rezultă că

$$a'_n \leq a_m \leq I \quad (2)$$

Cum  $\{a'_n\}$  este crescător, deducem că  $\{a'_n\}$  este convergent și  $I' = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n \leq I$ .

Inversând rolul șirurilor  $\{D_n\}$  și  $\{D'_n\}$  rezultă că  $I \leq I'$ , deci  $I = I'$ .

**Exemplul 5.8.1.** Să se studieze convergența integralei generalizate

$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , unde  $D = \mathbb{R}^2$ . Observăm că este o integrală generalizată în care

domeniul  $D$  este nemărginit. Deoarece  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \geq 0$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , rezultă că este suficient să găsim un șir de domenii mărginite, care au arie  $\{D_n\}$ ,

pentru care șirul cu termenul general  $a_n = \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$  este mărginit.

Alegem  $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < n^2\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Este evident că  $\{D_n\}$  are proprietățile (i)-(iii). Pe de altă parte,

$$a_n = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^n e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \pi (1 - e^{-n^2}) \rightarrow \pi.$$

Rezultă că integrala este convergentă și  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$ .

Pe de altă parte fie  $D'_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| < n, |y| < n\}$ . Șirul  $\{D'_n\}$  este un șir de pătrate pline, care îndeplinește condițiile (i)-(iii), rezultă că

$$\begin{aligned} \pi &= \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \left( \int_{-n}^n e^{-x^2-y^2} dx \right) dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

(S-a folosit faptul că  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  este convergentă).

Am calculat astfel integrala lui Poisson și anume  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

**Exemplul 5.8.2.** Să se studieze convergența integralei generalizate

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}, \alpha > 0, \text{ unde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < a^2\}.$$

Observăm că funcția  $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}$  nu este definită în  $O(0,0)$  și nu

este mărginită pe  $D$ .

Fie  $D_n = D \setminus B\left(0; \frac{1}{n}\right) = \left\{(x, y); \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$ . Este clar că  $\{D_n\}$  este

un șir de domenii mărginite, care are arie și care îndeplinește condițiile (i)-(iii), iar  $f$  este continuă pe  $D_n$ , deci integrabilă pe  $D_n$ . În continuare avem:

$$\iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \int_0^{2\pi} \left( \int_{1/n}^a \frac{\rho}{\rho^\alpha} d\rho \right) = \frac{2\pi}{2-\alpha} \cdot [a^{2-\alpha} - n^{\alpha-2}].$$

Observăm că dacă  $\alpha < 2$ , atunci există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi \cdot a^{2-\alpha}}{2-\alpha}$ .

Așadar, dacă  $\alpha < 2$ , integrala este convergentă și  $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi}{2-\alpha} \cdot a^{2-\alpha}$ .

Dacă  $\alpha > 2$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = +\infty$ .

Pentru  $\alpha = 2$ , avem  $\iint_{D_n} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/n}^a \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi \left[ \ln a - \ln \frac{1}{n} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

Rezultă că  $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$  este divergentă.

**Exemplul 5.8.3.** Să se studieze convergența integralei  $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}$ , unde

$D = \{(x, y); x^2 + y^2 > a^2, a > 0\}$ . Evident, domeniul  $D$  este nemărginit.

Dacă notăm cu  $D_n = \{(x, y); a^2 < x^2 + y^2 < n^2\}$ , rezultă că  $\{D_n\}$  satisface condițiile (i)-(iii).

Pe de altă parte, procedând ca în exercițiul precedent deducem că

$$\iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi}{\alpha-2} \cdot [n^{2-\alpha} - a^{2-\alpha}], \text{ dacă } \alpha \neq 2 \text{ și } \iint_{D_n} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = 2\pi [\ln n - \ln a].$$

Rezultă că integrala este convergentă dacă  $\alpha > 2$  și divergentă dacă  $\alpha \leq 2$ .

**Teorema 5.8.2.** Fie  $f, g: D \rightarrow \mathbb{P}_+$ , cu proprietatea  $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in D$ . Dacă  $\iint_D g(x, y) dx dy$  este convergentă, atunci și  $\iint_D f(x, y) dx dy$  este convergentă.

Afirmația rezultă imediat din Teorema 5.8.1 și din inegalitatea

$$a_n = \iint_{D_n} f(x, y) dx dy = \iint_{D_n} g(x, y) dx dy = b_n, \forall n.$$

**Definiția 5.8.2** Fie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , integrabilă pe orice bilă închisă  $B_r$ , cu centrul în origine și de rază  $R$ . Dacă există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_r} f(x, y) dx dy$  și e finită, atunci, această limită se numește valoarea principală în sensul lui Cauchy a integralei generalizate  $\iint_D f(x, y) dx dy$ .

Se folosește notația:

$$V.p. \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy.$$

**Exemplul 5.8.4.**  $V.p. \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot h(x^2 + y^2) dx dy = 0$ , oricare ar fi  $h$  o funcție

continuă pe  $\mathbb{R}^2$ . Într-adevăr,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} x \cdot h(x^2 + y^2) dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^r \rho^2 \ln \rho^2 d\rho = 0.$$

## 5.9. INTEGRALE TRIPLE

După cum am văzut în acest capitol, trecerea de la integrala simplă la integrala dublă, pe lângă multe analogii, presupune și unele modificări de substanță, atât în planul conceptelor, cât și în cel al raționamentelor. Aceste modificări își au originea în principal, în teoria mulțimilor plane măsurabile (care au arie). În contrast cu această situație, trecerea de la integrala dublă la integrala triplă nu presupune nici un fel de complicație. Pentru început se impune introducerea noțiunii de volum. Din geometria elementară se știe că volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu produsul lungimilor muchiilor sale. În particular, dacă  $T$  este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, adică  $T = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ , atunci

$$\text{Vol}(T) = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1).$$

**Definiția 5.9.1** Prin mulțime elementară în spațiu înțelegem orice reuniune finită de paralelipipede dreptunghice cu muchiile paralele cu axele de coordonate, fără puncte interioare comune.

Volumul unei astfel de mulțime este prin definiție suma volumelor paralelipipedelor care o compun. Mai precis,  $T$  este o mulțime elementară dacă există

$$T_i = [a_{i1}, a_{i2}] \times [b_{i1}, b_{i2}] \times [c_{i1}, c_{i2}], \quad i = \overline{1, p} \quad \text{astfel încât} \quad T = \bigcup_{i=1}^p T_i \quad \text{și} \quad \overset{\circ}{T}_i \cap \overset{\circ}{T}_j = \emptyset \quad \text{pentru} \quad i \neq j.$$

$$\text{Vol}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^p \text{Vol}(T_i) = \sum_{i=1}^p (a_{i2} - a_{i1})(b_{i2} - b_{i1})(c_{i2} - c_{i1}).$$

În continuare notăm cu  $\mathbf{T}$  familia tuturor mulțimilor elementare din spațiu.

**Definiția 5.9.2** Fie  $T$  un domeniu mărginit din  $\square^3$ . Se numește volumul interior al lui  $T$  următorul număr:

$$V_* = \sup \{ \text{Vol}(T'); T' \subset T, T' \in \mathbf{T} \}$$

(În cazul când nu există  $T' \in \mathbf{T}$  astfel încât  $T' \subset T$ , vom defini  $V_* = 0$ ).

În mod analog, definim volumul exterior astfel:

$$V^* = \inf \{ \text{Vol}(T''); T'' \supset T, T'' \in \mathbf{T} \}$$

Este evident că  $V_* \leq V^*$ .

Spunem că domeniul  $T$  este măsurabil (are volum) dacă  $V_* = V^* = V$ . Dacă  $T$  are volum, atunci prin definiție  $\text{Vol}(T) = V = V_* = V^*$ .

**Observația 5.9.1** Orice mulțime elementară în spațiu are volum în sensul definiției 5.9.2 și acesta coincide cu cel din Definiția 5.9.1.

**Teorema 5.9.1.** Fie  $D \subset \square^2$  un domeniu mărginit care are arie și fie  $f: \bar{D} \rightarrow \square_+$  o funcție continuă. Dacă notăm cu

$$T = \{ (x, y, z) \in \square^3; (x, y) \in \bar{D}, 0 \leq z \leq f(x, y) \}$$

atunci  $T$  are volum și  $\text{Vol}(T) = \iint_D f(x, y) dx dy$ .

*Demonstrație.*

Din punct de vedere geometric domeniul  $T$  este un corp cilindric mărginit inferior de domeniul  $D$ , lateral de suprafața cilindrică, care are generatoarele paralele cu axa  $Oz$  și curba directoare  $\text{fr}(D)$ , iar superior de graficul funcției  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \bar{D}$ .



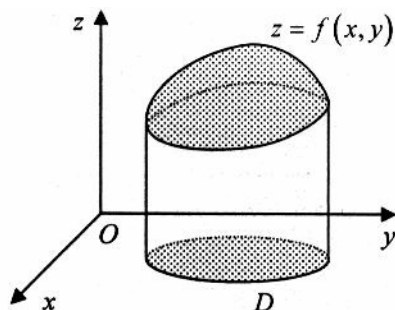


Fig. 1

funcției  $f$  pe domeniul  $D_h$  și fie  $s_k = \sum_{D_h \in I_k} m_h \text{aria } D_h$ . Ținând seama de (1) și de

faptul că  $f$  este integrabilă pe  $D$  rezultă că  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \iint_D f(x, y) dx dy$ .

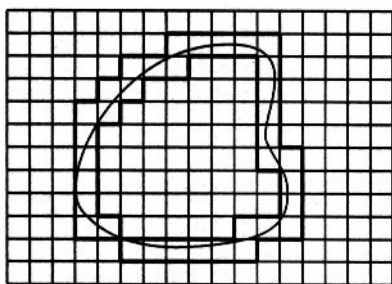


Fig. 2

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Fie  $T'_h$  paralelipipedul dreptunghic cu muchiile paralele cu axele de coordonate de bază  $\Delta_h$  și înălțime  $m_h$  și fie  $T'_k = U\{T'_h; \Delta_h \in I_k\}$ . Este evident că  $T'_k$  este o mulțime elementară în spațiu,  $T'_k \subset T$  și  $\text{Vol}(T'_k) = s_k$ .

Pe de altă parte, dacă notăm cu  $T''_h$  paralelipipedul dreptunghic de bază  $\Delta_h$  și înălțime  $M_h$  și cu  $T''_k = U\{T''_h; \Delta_h \in J_k\}$ , atunci  $T''_k$  este o mulțime elementară în spațiu,  $T''_k \supset T$  și  $\text{Vol}(T''_k) = S_k$ . În continuare avem:

$$0 \leq V^* - V_* \leq \text{Vol}(T''_k) - \text{Vol}(T'_k) = S_k - s_k.$$

Cum  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k - s_k = 0$ , rezultă că

$$V^* = V_* = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Considerăm în planul  $xOy$  o rețea  $S_k$  de pas  $h = 2^{-k}$ , formată de dreptele  $x = ph$ ,  $y = lh$ ,  $p, l \in \mathbb{N}$ . Fie  $I_k$  familia tuturor pătratelor (pline)  $\Delta_h$  ale rețelei  $S_k$  incluse în  $D$  și fie  $P_k$  reuniunea acestor pătrate. Conform Observației 5.2.3 avem  $\text{aria } D = \sup_k \text{aria } P_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{aria } P_k$  (1)

Fie  $m_h$  (respectiv  $M_h$ ) marginea inferioară (respectiv superioară) a

Fie  $J_k$  familia tuturor pătratelor  $D_h$  care conțin cel puțin un punct din  $D$  și fie  $Q_k$  reuniunea acestor pătrate. Evident  $P_k \subset D \subset Q_k$ . Mai mult, se poate arăta că  $\text{aria } D = \inf_k \text{aria } Q_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{aria } Q_k$  (2)

Dacă notăm cu  $S_k = \sum_{D_h \in J_k} M_h \text{aria } D_h$ , (cu precizarea că dacă  $D_h \in J_k \setminus I_k$ , atunci  $M_h = \sup\{f(x, y); (x, y) \in D_h \cap D\}$ , atunci

**Observația 5.9.2** Din Teorema 5.9.1 rezultă interpretarea geometrică a integralei duble. Dacă  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$  este continuă, atunci  $\iint_D f(x, y) dx dy$  este volumul corpului cilindric mărginit inferior de  $D$ , lateral de suprafața cilindrică cu generatoarele paralele cu  $Oz$  și curba directoare  $C = \text{fr}D$  și superior de suprafața  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \bar{D}$  (Vezi fig. 1).

Demonstrația următoarei teoreme este complet analoagă cu cazul domeniilor plane.

**Teorema 5.9.2.** *Un domeniu  $T \subset \mathbb{R}^3$  are volum dacă și numai dacă pentru  $\forall \varepsilon > 0$  există două mulțimi elementare în spațiu  $P_\varepsilon$  și  $Q_\varepsilon$  astfel încât  $P_\varepsilon \subset T \subset Q_\varepsilon$  și  $\text{Vol}(Q_\varepsilon) - \text{Vol}(P_\varepsilon) < \varepsilon$ .*

**Definiția 5.9.2** *O mulțime  $A \subset \mathbb{R}^3$  este de volum zero dacă  $\forall \varepsilon > 0$ , există o mulțime elementară în spațiu  $P_\varepsilon$  cu proprietățile:  $A \subset P_\varepsilon$  și  $\text{Vol}(P_\varepsilon) < \varepsilon$ .*

Ținând seama de această definiție, Teorema 5.9.2 se poate reformula astfel:

**Teorema 5.9.3.** *Un domeniu mărginit  $T \subset \mathbb{R}^3$  are volum dacă și numai dacă frontiera sa este de arie zero.*

Fie acum  $T \subset \mathbb{R}^3$  un domeniu mărginit și fie  $\rho: T_1, T_2, \dots, T_n$  o familie de subdomenii cu proprietățile:

- 1)  $T = \bigcup_{i=1}^n T_i$
- 2)  $\overset{\circ}{T}_i \cap \overset{\circ}{T}_j = \emptyset$  dacă  $i \neq j$
- 3)  $T_i$  are volum,  $\forall i = \overline{1, n}$ .

O astfel de familie de subdomenii se numește partiție a lui  $T$ . Se numește norma partiției  $\rho$  cel mai mare diametru dintre diametrele domeniilor  $T_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Așadar

$$\|\rho\| = \max \{ \text{diam}(T_i), 1 \leq i \leq n \}, \text{ unde}$$

$$\text{diam}(T_i) = \sup \{ \text{dist}(M', M''); M', M'' \in T_i \}.$$

**Definiția 5.9.3** *Fie  $T \subset \mathbb{R}^3$  un domeniu mărginit care are volum, fie  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $\rho: T_1, T_2, \dots, T_n$  o partiție oarecare a lui  $T$ . Notăm cu  $P_i$  un punct oarecare din subdomeniul  $T_i$  și cu*

$$\sigma_\rho(f, P_i) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \text{Vol}(T_i).$$

Spunem că  $f$  este integrabilă pe domeniul  $T$  dacă există un număr finit  $I$  cu proprietatea că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât oricare ar fi partiția  $\rho$  a lui  $T$  cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  și oricare ar fi punctele  $P_i \in T_i$  avem:

$$|\sigma_\rho(f, P_i) - I| < \varepsilon.$$

Numărul  $I$  se numește integrala triplă a funcției  $f$  pe domeniul  $T$  și se folosește notația:  $I = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ . De asemenea, vom scrie

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \text{Vol}(T_i),$$

sensul exact fiind cel din Definiția 5.9.3.

Proprietățile integralei triple sunt complet analoage cu proprietățile integralei duble. În particular se poate arăta că orice funcție continuă este integrabilă.

**Definiția 5.9.4** Un domeniu  $T \subset \square^3$  se numește simplu în raport cu axa  $Oz$  dacă există un domeniu  $D \subset \square^2$  care are arie și două funcții continue  $\varphi, \psi: \bar{D} \rightarrow \square$  cu proprietatea  $\varphi(x, y) < \psi(x, y), \forall (x, y) \in D$  astfel încât

$$T = \{(x, y, z) \in \square^3; \varphi(x, y) < z < \psi(x, y), \forall (x, y) \in D\}.$$

Din Teorema 5.9.1 rezultă că un astfel de domeniu are volum și

$$\text{Vol}(T) = \iint_D \psi(x, y) dx dy - \iint_D \varphi(x, y) dx dy.$$

**Teorema 5.9.4.** Fie  $T \subset \square^3$  un domeniu simplu în raport cu  $Oz$  și fie  $f: T \rightarrow \mathbb{P}$  o funcție continuă. Atunci:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

**Exemplul 5.9.1.** Să se calculeze volumul tetraedrului  $T$  mărginit de planele:  $x = 0, y = 0, z = 0$  și  $x + 2y + z - 6 = 0$ . Proiecția tetraedrului  $T$  în planul  $xOy$  este triunghiul (plin)  $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq 3 - \frac{x}{2}\}$  iar  $T$  este următorul domeniu simplu în raport cu  $Oz$ :  $T = \{(x, y, z); 0 \leq z \leq 6 - x - 2y, (x, y) \in D\}$ .

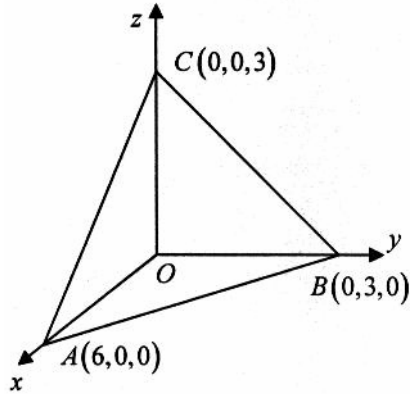


Fig. 3

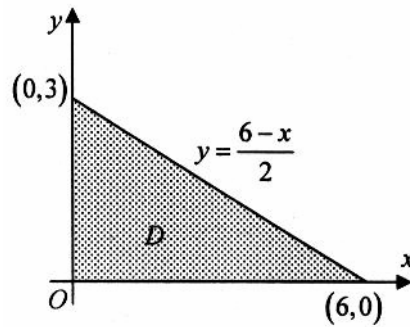


Fig. 4

Evident

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) &= \iiint_T dx dy dz = \iint_D \left( \int_0^{6-x-2y} dz \right) dx dy = \int_0^6 \left( \int_0^{3-\frac{x}{2}} (6-x-2y) dy \right) dx = \\ &= \int_0^6 \left( (6y - xy - y^2) \Big|_0^{3-\frac{x}{2}} \right) dx = \int_0^6 \left( 9 - 3x + \frac{x^2}{4} \right) dx = 9x - 3\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} \Big|_0^6 = 18. \end{aligned}$$

**Exemplul 5.9.2.** Să se calculeze  $\iint_T \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  unde  $T$  este domeniul mărginit de suprafețele  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

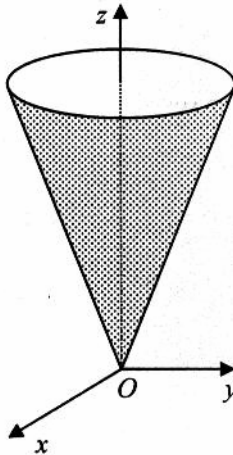


Fig. 5

Din punct de vedere geometric  $z^2 = x^2 + y^2$  reprezintă un con cu vârful în origine. Observăm că dacă notăm cu  $D$  discul  $x^2 + y^2 < 1$ , atunci

$$T = \{(x, y, z); \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1, (x, y) \in D\}.$$

Avem

$$\begin{aligned} \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \left( \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^1 dz \right) = \\ &= \iint_D \left( \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2) \right) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho - \rho^2) \rho d\rho = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

În continuare prezentăm teorema schimbării de variabile în integrala triplă.

**Teorema 5.9.5.** Fie  $\Omega$  și  $T$  două domenii din  $\square^3$  și fie  $F: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{T}$  o funcție vectorială surjectivă, definită prin  $F(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ ,  $\forall (u, v, w) \in \bar{\Omega}$ .

Presupunem că  $F \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $F: \Omega \rightarrow T$  este bijectivă și că iacobianul  $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$  pe  $\Omega$ . Dacă  $f: \bar{T} \rightarrow \square$  este o funcție continuă, atunci

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\Omega} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}(u, v, w) \right| du dv dw. \end{aligned}$$

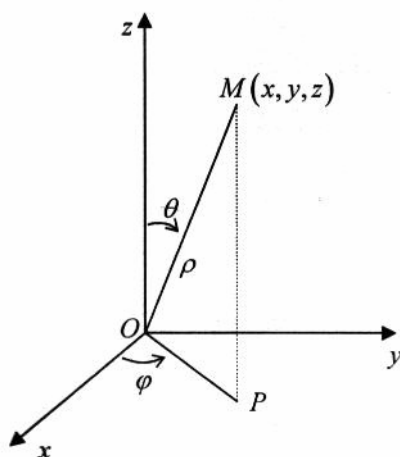


Fig. 6

Cea mai utilizată schimbare de variabile în spațiu este trecerea la coordonate polare.

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 < \rho < \infty \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi & 0 < \theta < \pi \\ z = \rho \cos \theta & 0 < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Semnificația notațiilor este prezentată în figura 6.

Iacobianul transformării este

$$\begin{aligned} \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} &= \\ &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \rho^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

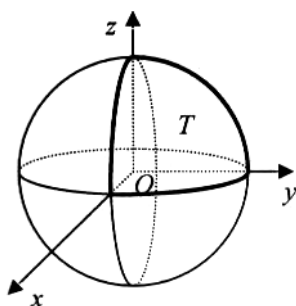


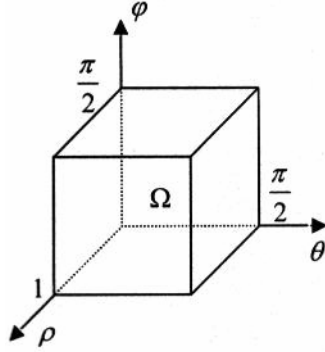
Fig. 7

**Exemplul 5.9.3.** Să se calculeze

$$\iiint_T xyz dx dy dz, \text{ unde } T \text{ este domeniul mărginit de}$$

suprafețele  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  și  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Din punct de vedere geometric, domeniul  $T$  este primul octant din sfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . Trecem la coordonate polare și notăm cu

$$\Omega = \left\{ (\rho, \theta, \varphi); 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}.$$



Observăm că între domeniile  $\Omega$  și  $T$  există o corespondență bijectivă. Din Teorema 5.9.5 rezultă:

$$\begin{aligned} \iiint_T xyz \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \iiint_{\Omega} \rho^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^5 \, d\rho = \\ &= \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

În încheierea acestui paragraf prezentăm câteva aplicații ale integralei triple în mecanică.

Fie  $T \subset \mathbb{R}^3$  un domeniu mărginit și fie  $\rho: \bar{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$  o funcție continuă. Dacă considerăm un corp neomogen care are forma domeniului  $T$ , de densitate variabilă  $\rho = \rho(x, y, z)$ , atunci masa acestui corp este  $M = \iiint_T \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ .

Pentru un corp omogen, care are forma domeniului  $T$ , coordonatele centrului său de greutate  $G$  se calculează cu formulele:

$$x_G = \frac{\iiint_T x \, dx \, dy \, dz}{\iiint_T dx \, dy \, dz}, \quad y_G = \frac{\iiint_T y \, dx \, dy \, dz}{\iiint_T dx \, dy \, dz}, \quad z_G = \frac{\iiint_T z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_T dx \, dy \, dz}.$$

Pentru un corp omogen de densitate  $\rho = 1$ , momentele de inerție în raport cu originea  $O$ , în raport cu axa  $Oz$ , respectiv în raport cu planul  $xOy$  se calculează cu formulele:

$$I_O = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{Oz} = \iiint_T (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{xOy} = \iiint_T z^2 \, dx \, dy \, dz.$$

## CAPITOLUL 6

### INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

#### 6.1. SUPRAFETE PARAMETRIZATE NETEDE

**Definiția 6.1.1.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domeniu (mulțime deschisă și conexă). Se numește pânză parametrizată de clasă  $C^1$ , orice funcție vectorială  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clasă  $C^1$ .

Dacă notăm cu  $x, y$  și  $z$  componentele scalare ale lui  $r$ , atunci  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $\forall (u, v) \in D$ . Ecuațiile  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$  se numesc ecuațiile parametrice ale pânzei  $r$ , sau o reprezentare parametrică a pânzei, iar  $u$  și  $v$  se numesc parametrii pânzei. Imaginea directă a domeniului  $D$  prin funcția vectorială  $r$ , adică mulțimea

$S = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v); (u, v) \in D\}$  se numește suportul (sau urma) pânzei  $r$ .

În continuare vom folosi câteva notații specifice geometriei diferențiale. Pentru funcția  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  folosim notația vectorială:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in D.$$

De asemenea, notăm cu  $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$ ,  $y_u = \frac{\partial y}{\partial u}$  etc., cu

$$A = A(u, v) = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = B(u, v) = \frac{D(z, x)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix},$$

$$C = C(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$$

$$E = \|\vec{r}_u\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad \text{și}$$

$$G = \|\vec{r}_v\|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Observăm că:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \quad \text{și} \quad \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Dacă notăm cu  $\varphi$  unghiul dintre vectorii  $\vec{r}_u$  și  $\vec{r}_v$ , atunci

$$EG - F^2 = \|\vec{r}_u\|^2 \|\vec{r}_v\|^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = \|\vec{r}_u\|^2 \|\vec{r}_v\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) =$$

$$= (\|\vec{r}_u\|^2 \|\vec{r}_v\|^2 \sin^2 \varphi) = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Așadar avem:

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 \quad (1)$$

**Definiția 6.1.2.** O pânză parametrizată de clasă  $C^1$  se numește netedă dacă  $A^2 + B^2 + C^2 > 0, \forall (u, v) \in D$ .

Pentru o pânză parametrizată netedă rezultă că  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0, \forall (u, v) \in D$ , deci  $\vec{r}_u$  și  $\vec{r}_v$  sunt necoliniari. Fie  $(u, v) \in D$  și fie  $M[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \in S$ , punctul corespunzător de pe suportul pânzei  $r$ . Planul determinat de vectorii  $\vec{r}_u$  și  $\vec{r}_v$  și care trece prin  $M$  se numește planul tangent în  $M$  la  $S$  și are ecuația:

$$A(X - x(u, v)) + B(Y - y(u, v)) + C(Z - z(u, v)) = 0 \quad (2)$$

Normala în punctul  $M$  la  $S$  (adică perpendiculara pe planul tangent în punctul  $M$  al suportului  $S$  al pânzei) este paralelă cu vectorul  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ . Rezultă că parametrii directori ai normalei în  $M$  la  $S$  sunt  $A, B$  și  $C$ .

**Definiția 6.1.3.** O pânză parametrizată  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  se numește simplă, dacă funcția  $r$  este injectivă, adică dacă  $r(u_1, v_1) \neq r(u_2, v_2)$ , oricare ar fi punctele  $(u_1, v_1) \in D, (u_2, v_2) \in D, (u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ .

**Exemplul 6.1.1** Fie pânza parametrizată de clasă  $C^1$ , definită prin:

$r(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u), (u, v) \in D = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Ecuațiile parametrice sunt:

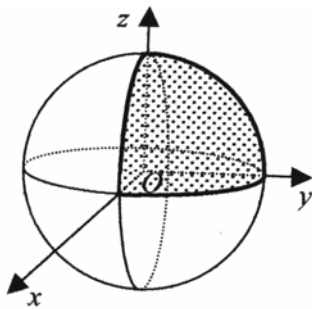


Fig. 1

$$\begin{cases} x = R \sin u \cos v \\ y = R \sin u \sin v \\ z = R \cos u \end{cases} \quad (u, v) \in D = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Observăm că pentru orice  $(u, v) \in D$ , punctul

$(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  verifică ecuația

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x > 0, y > 0, z > 0$ . Rezultă că suportul acestei pânze este porțiunea sferei cu centrul în origine și de rază  $R$ , cuprinsă în primul

octant. Mai departe avem:

$$x_u = R \cos u \cos v, y_u = R \cos u \sin v, z_u = -R \sin u$$



$$\begin{aligned}
x_v &= -R \sin u \sin v, \quad y_v = R \sin u \cos v, \quad z_v = 0 \\
A &= R^2 \sin^2 u \cos v, \quad B = R^2 \sin^2 u \sin v, \quad C = R^2 \sin u \cos u \\
E &= R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \sin^2 u \\
A^2 + B^2 + C^2 &= EG - F^2 = R^4 \sin^2 u > 0, \quad \forall (u, v) \in D.
\end{aligned}$$

De asemenea, este evident că funcția  $r$  este injectivă pe  $D$ . Așadar, pânza parametrizată din acest exemplu este o pânză parametrizată netedă și simplă.

Un caz particular de pânză parametrizată, deosebit de important în aplicații, este cazul pânzei definită explicit. Mai precis, fie  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domeniu și fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^1$ . Notăm cu  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$  și cu  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ . Cu ajutorul

funcției  $f$  putem defini următoarea pânză parametrizată de clasă  $C^1$ :

$$r: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad \forall (x, y) \in D.$$

Ecuatiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D.$$

Observăm că suportul acestei pânze este graficul funcției  $f$  (Fig. 2).

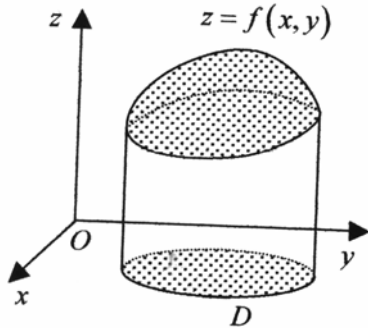


Fig. 2

Pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned}
A &= \frac{D(y, z)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{vmatrix} = -p, \\
B &= \frac{D(z, x)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -q \quad \text{și} \\
C &= \frac{D(x, y)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

Deoarece  $A^2 + B^2 + C^2 = p^2 + q^2 + 1 > 0$ , rezultă că pânza (3) este netedă. De asemenea, este evident că este o pânză simplă.

Planul tangent într-un punct oarecare  $M(x, y, f(x, y))$  are ecuația:

$(X - x)(-p) + (Y - y)(-q) + Z - f(x, y) = 0$ , iar parametrii directori ai normalei în  $M$  sunt  $(-p, -q, 1)$ .

**Definiția 6.1.5.** Două pânze parametrizate de clasă  $C^1$ ,  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  și  $r_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se numesc echivalente cu aceeași orientare dacă există un difeomorfism  $\Phi: D \rightarrow D_1$  cu proprietățile:  $\det J_\Phi(u, v) > 0$ ,  $\forall (u, v) \in D$  și  $r = r_1 \circ \Phi$ .

Reamintim că  $\Phi$  este difeomorfism, dacă  $\Phi$  este bijectivă,  $\Phi \in C^1(D)$  și  $\Phi^{-1} \in C^1(D_1)$

Dacă  $\det J_\Phi < 0$  pe  $D$ , spunem că cele două pânze sunt echivalente cu orientări opuse. Funcția  $\Phi$  se mai numește și schimbare de parametri. Vom nota cu  $r \sqcap r_1$  faptul că pânzele  $r$  și  $r_1$  sunt echivalente. Din Definiția 6.1.4 rezultă:

**Observația 6.1.1** Orice două pânze echivalente au același suport.

**Exemplul 6.1.2.** Fie pânza parametrizată definită astfel:

$$r_1(u_1, v_1) = (u_1, v_1, \sqrt{R^2 - u_1^2 - v_1^2}),$$

$$(u_1, v_1) \in D_1 = \{(u_1, v_1) \in \mathbb{R}^2; u_1^2 + v_1^2 < R^2, u_1 > 0, v_1 > 0\}.$$

Observăm că pânzele din exemplele 6.1.1 și 6.1.2 sunt echivalente cu aceeași orientare. Într-adevăr, fie  $\Phi: D = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow D_1$ , definită prin:

$$\Phi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v), (u, v) \in D. \text{ Rezultă că } \Phi \in C^1(D) \text{ și}$$

$$J_\Phi(u, v) = \begin{vmatrix} R \cos u \cos v & -R \sin u \sin v \\ R \cos u \sin v & R \sin u \cos v \end{vmatrix} = R^2 \sin u \cos u > 0, \quad \forall (u, v) \in D. \text{ Dacă}$$

presupunem că  $\Phi(u', v') = \Phi(u'', v'')$ , atunci rezultă că  $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} v'$  și mai departe că  $v = v'$  și  $u = u'$ . Așadar,  $\Phi$  este injectivă. Pentru a dovedi că  $\Phi$  este și surjectivă,

fie  $u_1 > 0$ ,  $v_1 > 0$  cu proprietatea  $u_1^2 + v_1^2 < R^2$ . Deoarece  $0 < \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{R} < 1$ , rezultă

că există  $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  astfel încât  $\frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{R} = \sin u$ , relație echivalentă cu

$$\left(\frac{u_1}{R \sin u}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{R \sin u}\right)^2 = 1. \text{ Atunci există } v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ astfel încât } \frac{u_1}{R \sin u} = \cos v \text{ și}$$

$\frac{v_1}{R \sin u} = \sin v$ . În definitiv, am arătat că există  $(u, v) \in D$  astfel încât

$u_1 = R \sin u \cos v$ ,  $v_1 = R \sin u \sin v$ , deci  $(u_1, v_1) = \Phi(u, v)$ . De asemenea, este ușor de observat că

$$\Phi^{-1}(u_1, v_1) = \left( \arcsin \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{R}, \arctg \frac{v_1}{u_1} \right), (u_1, v_1) \in D_1, \text{ deci } \Phi^{-1} \in C^1(D_1).$$

Pe de altă parte avem:

$$(r_1 \circ \Phi)(u, v) = r_1[\Phi(u, v)] = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u) = r(u, v),$$

$\forall (u, v) \in D$ , deci  $r \sqsubset r_1$ .

**Observația 6.1.2** Orice pânză parametrizată echivalentă cu o pânză parametrizată simplă sau netedă este la rândul său simplă sau netedă.

Într-adevăr, fie  $r \sqsubset r_1$  unde  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$ ,  
 $r_1(u_1, v_1) = (x_1(u_1, v_1), y_1(u_1, v_1), z_1(u_1, v_1))$ ,  $(u_1, v_1) \in D_1$  și fie  $\Phi: D \rightarrow D_1$ ,  
 $\Phi(u, v) = (\lambda(u, v), \mu(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$ , schimbarea de parametri.

Deoarece  $r = r_1 \circ \Phi$  și  $\Phi$  este bijectivă, rezultă că dacă  $r_1$  este injectivă (deci simplă) atunci și  $r$  este injectivă (simplă). Pe de altă parte:

$$x(u, v) = x_1[\lambda(u, v), \mu(u, v)], \quad y(u, v) = y_1[\lambda(u, v), \mu(u, v)] \quad \text{și} \\ z(u, v) = z_1[\lambda(u, v), \mu(u, v)].$$

Ținând seama de formulele de derivare a funcțiilor compuse de două variabile rezultă:

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \frac{D(y_1, z_1)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)} = A_1 \cdot \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)}$$

și analog

$$B = B_1 \cdot \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)} \quad \text{și} \quad C = C_1 \cdot \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)}.$$

Așadar, avem:

$$A^2 + B^2 + C^2 = (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) \left[ \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)} \right]^2. \quad \text{Cum} \quad \left[ \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)} \right]^2 > 0, \text{ rezultă că}$$

dacă  $r$  (respectiv  $r_1$ ) este netedă, atunci și  $r_1$  (respectiv  $r$ ) este netedă.

**Definiția 6.1.6** Se numește suprafață parametrizată de clasă  $C^1$  orice clasă de echivalență de pânze parametrizate de clasă  $C^1$ .

Așadar,  $\hat{S}$  este o suprafață parametrizată de clasă  $C^1$ , dacă există o pânză parametrizată de clasă  $C^1$ ,  $r: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , astfel încât:

$$\hat{S} = \{r_1: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ pânză netedă parametrizată; } r \sqsubset r_1\}.$$

Cum  $r \sqsubset r_1$ , rezultă că  $r \in \hat{S}$ . Suprafața  $\hat{S}$  se numește simplă (respectiv netedă)

dacă pânza  $r$  care o determină este simplă (netedă). Suportul suprafeței  $\hat{S}$ , este suportul  $S$  al pânzei  $r$  care o determină, același cu suportul oricărei alte pânze de clasă  $\hat{S}$ . De regulă, vom identifica suprafața  $\hat{S}$  cu suportul său  $S$ .

## 6.2. ARIA UNEI SUPRAFEȚE

Pentru început abordăm problema ariei unei suprafețe nedete explicită. Fie  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domeniu mărginit care are arie și fie  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^1$  pe  $\bar{D}$ . Dacă notăm cu  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$  și  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ , rezultă că  $p$  și  $q$  sunt continue pe  $\bar{D}$ . Fie

$S$  (respectiv  $\bar{S}$ ) graficul funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (respectiv  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ). Așadar,

$$S = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D\} \text{ și } \bar{S} = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in \bar{D}\}.$$

Mulțimea  $\Gamma = \bar{S} \setminus S$  se numește bordura suprafeței  $S$ . Dacă  $S$  este frontiera domeniului  $D$ , atunci

$$\Gamma = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in C\}.$$

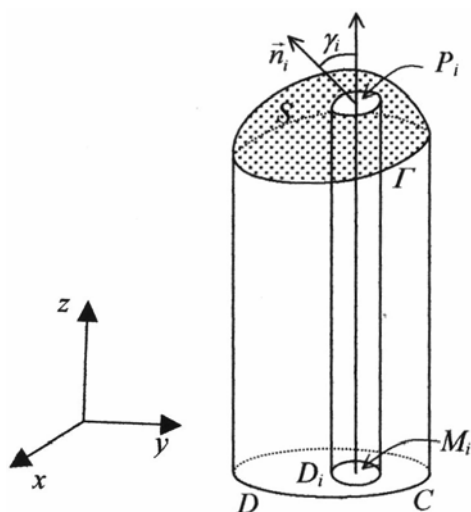


Fig. 1

Fie  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$  o partiție a domeniului  $D$  și fie  $M_i(x_i, y_i)$  un punct oarecare din  $D_i$ . Notăm cu  $P_i$  punctul corespunzător de pe suprafața  $S$ . Evident  $P_i$  are coordonatele  $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ .

Fie  $\pi_i$  planul tangent la  $S$  în punctul  $P_i$  și fie  $\vec{n}_i$  versorul normalei la  $S$  în  $P_i$ , orientat în sus. Dacă notăm cu  $\gamma_i$  unghiul format de versorul  $\vec{n}_i$  cu axa  $Oz$ , atunci  $\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}}$ ,

unde  $p_i = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)$  și  $q_i = \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)$ .

Fie  $T_i$  porțiunea decupată din planul tangent  $\pi_i$  de cilindrul cu generatoarele paralele cu  $Oz$  și curba directoare  $C_i$  – frontiera domeniului  $D_i$ . Deoarece  $\gamma_i$  este unghiul dintre planul  $\pi_i$  și planul  $xOy$  rezultă că aria  $D_i = \text{aria}(T_i) \cos \gamma_i$  sau

$$\text{aria}(T_i) = \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \cdot \text{aria}(D_i) \quad (1)$$

Prin definiție, aria  $S = \text{aria } \bar{S} = A = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \text{aria}(T_i)$ . Sensul exact fiind următorul: Există  $A \in \mathbb{R}_+$  astfel încât  $\forall \varepsilon > 0$ , există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încât,  $\forall \rho: D_1, \dots, D_n$ , partiție a lui  $D$ , cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  și  $(\forall) M_i(x_i, y_i) \in D_i$ , avem:

$$\left| A - \sum_{i=1}^n \text{aria}(T_i) \right| < \varepsilon.$$

Ținând seama de (1) rezultă că  $\sum_{i=1}^n \text{aria}(T_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1+p_i^2+q_i^2} \cdot \text{aria } D_i$ .

Observăm că suma din membrul drept este suma Riemann atașată funcției  $g = \sqrt{1+p^2+q^2}$ , partiției  $\rho$  și punctelor intermediare  $M_i(x_i, y_i) \in D_i$ . Cum  $g$  este continuă pe  $D$ , deci integrabilă, rezultă că:

$$\text{aria } S = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sigma_\rho(g; M_i) = \iint_D g(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}(x, y) dx dy.$$

Așadar, o suprafață netedă explicită  $S: z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , are arie și

$$\text{aria } S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}(x, y) dx dy \quad (2)$$

**Exemplul 6.2.1** Să se calculeze aria suprafeței

$$S: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Rezultă:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Conform (2) avem

$$\begin{aligned} \text{Aria } S &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = \\ &= 2\pi R \cdot \sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_0^R = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Din punct de vedere geometric  $\bar{S} = \{(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}); x^2 + y^2 \leq R^2\}$  reprezintă emisfera superioară a sferei cu centrul în origini și de rază  $R$ . Aria întregii sfere va fi  $4\pi R^2$ .

**Definiția 6.2.1** Fie  $S$  o suprafață parametrizată simplă și netedă și fie  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $\forall (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ , o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că  $D$  este un domeniu mărginit care are arie și că  $x, y, z \in C^1(\bar{D})$ . Notăm cu  $S = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (u, v) \in D\}$  și cu

$$\bar{S} = \{ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (u, v) \in \bar{D} \}.$$

Deoarece suprafața este simplă, rezultă că funcția  $r : D \rightarrow S$  este bijectivă. Mulțimea  $\Gamma = \bar{S} \setminus S$  se numește bordura suprafeței  $S$ . Dacă notăm cu  $C$  frontiera domeniului  $D$ , atunci

$$\Gamma = r(C) = \{ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (u, v) \in C \}.$$

Correspondența dintre  $C$  și  $\Gamma$ , în general nu este bijectivă. Suprafața  $S$  se numește închisă dacă  $\bar{S} = S$ . O suprafață parametrizată închisă nu are bordură.

**Exemplul 6.2.2** Fie suprafața parametrizată

$$r(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u), (u, v) \in D = (0, \pi) \times (0, 2\pi).$$

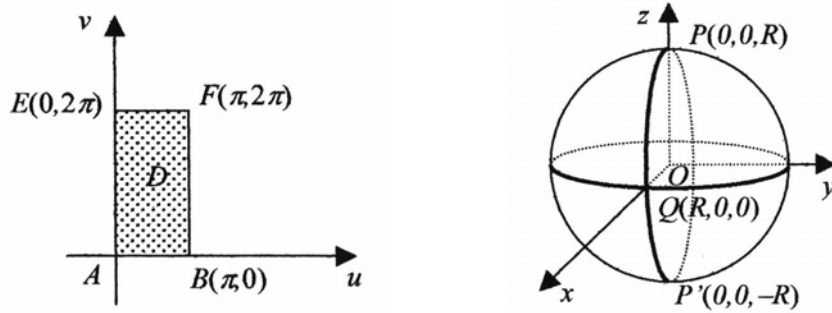


Fig. 2

Ecuatiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = R \sin u \cos v \\ y = R \sin u \sin v \\ z = R \cos u \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in (0, \pi) \\ v \in (0, 2\pi) \end{matrix}.$$

Observăm că  $r(0, v) = (0, 0, R)$ ,  $\forall v \in [0, 2\pi]$ . Așadar, imaginea oricărui punct de pe segmentul  $\overline{AE}$ , prin funcția vectorială  $r$ , este punctul  $P(0, 0, R)$ . În mod analog imaginea oricărui punct de pe segmentul  $\overline{BF}$  este punctul  $P'(0, 0, -R)$ .

Pe de altă parte, imaginea oricărui punct  $M \in \overline{AB} \cup \overline{EF}$  va fi un punct de coordonate  $x = R \sin u$ ,  $y = 0$ ,  $z = R \cos u$ ,  $u \in [0, \pi]$ .

Deoarece  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  și  $x \geq 0$  rezultă că imaginea frontierei domeniului  $D$  prin funcția vectorială  $r$  este meridianul  $\overline{PQP'}$  de pe sfera cu centrul în origine și de rază  $R$ . Așadar,  $S = r(D)$  este sfera cu centrul în origine și de rază  $R$  mai puțin meridianul  $\overline{PQP'}$ .

$\bar{S} = r(\bar{D})$  este sfera cu centrul în origine și de rază  $R$ . Bordura suprafeței  $S$  este  $\Gamma = \bar{S} \setminus S = \overline{PQP'}$ .

**Definiția 6.2.2** Fie  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domeniu mărginit care are arie și fie  $r: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{D}$ .

Presupun că  $r \in C^1(\bar{D})$  și  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  este injectivă. Fie  $S = r(D)$  și  $\bar{S} = r(\bar{D})$ . Prin definiție

$$\text{aria } S = \text{aria } \bar{S} = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du \, dv \quad (3)$$

**Observația 6.2.1** Fie  $S$  o suprafață netedă explicită:  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^1(\bar{D})$ . În acest caz  $A = -p$ ,  $B = -q$ ,  $C = 1$  și din Definiția 6.2.2 rezultă că:  $\text{aria } S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy$ .

Așadar, în acest caz particular, regăsim formula (2) de calcul a ariei unei suprafețe. Rezultă că Definiția 6.2.2 este generalizarea, pentru suprafețe parametrizate, a noțiunii de arie a unei suprafețe explicite.

**Observația 6.2.2** Aria unei suprafețe parametrizate nu depinde de parametrizarea aleasă.

Într-adevăr, fie  $S$  o suprafață parametrizată simplă și netedă și fie  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$ , o reprezentare parametrizată a sa. Dacă  $r_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $r_1(u_1, v_1) = (x_1(u_1, v_1), y_1(u_1, v_1), z_1(u_1, v_1))$ ,  $(u_1, v_1) \in D_1$  este o altă reprezentare parametrică echivalentă a lui  $S$ , atunci există un difeomorfism  $\Phi: D \rightarrow D_1$ ,  $\Phi(u, v) = (\lambda(u, v), \mu(u, v))$ ,  $\forall (u, v) \in D$  și avem

$$A^2 + B^2 + C^2 = (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) \left( \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)} \right)^2.$$

Dacă în formula (3) facem schimbarea de variabile  $u_1 = \lambda(u, v)$ ,  $v_1 = \mu(u, v)$  obținem

$$\begin{aligned} \text{aria } S &= \int_{D_1} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \, du_1 \, dv_1 = \int_D \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)} \right|^{-1} \cdot \left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)} \right| du \, dv = \\ &= \int_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du \, dv. \end{aligned}$$

**Exemplul 6.2.3** Să se calculeze aria suprafeței parametrizate

$$S: x = R \sin u \cos v, \quad y = R \sin u \sin v, \quad z = R \cos u, \quad (x, v) \in D = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Așa cum s-a arătat în exemplul 6.1.1, în acest caz

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = R^4 \sin^2 u, \text{ deci}$$

$$\text{Aria } S = \iint_D R^2 \sin u \, du \, dv = R^2 \int_0^{\pi/2} dv \int_0^{\pi/2} \sin u \, du = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Din punct de vedere geometric suprafața  $S$  este porțiunea din primul octant a sferei, cu centrul în origine și de rază  $R$ . Aria întregii sfere va fi egală cu

$$8 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 4\pi R^2.$$

**Exemplul 6.2.4** Să se calculeze aria torului.

Considerăm în planul  $xOy$  un cerc de rază  $a$  cu centrul în punctul  $(b, 0)$  unde  $0 < a < b$ . Torul este suprafața  $T$  care se obține când rotim acest cerc, ca un corp rigid, în spațiu în jurul axei  $Oy$ . Dacă  $\theta$  este unghiul din figura 2 și  $\varphi$  este unghiul de rotire al cercului în jurul axei  $Oy$ , atunci ecuațiile parametrice ale torului sunt:

$$T: \begin{cases} x = (b + a \cos \theta) \cos \varphi \\ y = a \sin \theta \\ z = (b + a \cos \theta) \sin \varphi \end{cases} \quad (\theta, \varphi) \in D = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi).$$

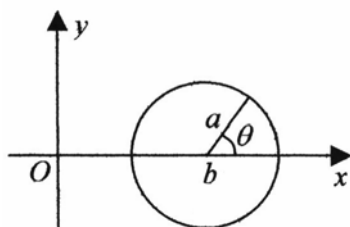


Fig. 2

Rezultă:

$$x_\theta = -a \sin \theta \cos \varphi \quad y_\theta = a \cos \theta$$

$$z_\theta = -a \sin \theta \sin \varphi$$

$$x_\varphi = -(b + a \cos \theta) \sin \varphi \quad y_\varphi = 0$$

$$z_\varphi = (b + a \cos \theta) \cos \varphi$$

$$E = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = a^2;$$

$$F = x_\theta x_\varphi + y_\theta y_\varphi + z_\theta z_\varphi = 0;$$

$$G = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = (b + a \cos \theta)^2$$

$$EG - F^2 = a^2 (b + a \cos \theta)^2.$$

$$\text{Aria } T = \iint_D a(b + a \cos \theta) d\theta d\varphi = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (b + a \cos \theta) d\theta = 4\pi^2 ab.$$

Așadar, aria torului este  $4\pi^2 ab$ . În cazul particular când  $a = b$  reobținem aria sferei.



### 6.3. INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ DE PRIMA SPEȚĂ

Fie  $S$  o suprafață parametrizată simplă și netedă și fie  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$  o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că  $D$  este un domeniu mărginit care are arie și că  $x, y, z \in C^1(\bar{D})$ . Fie de asemenea,  $F$  o funcție reală definită pe  $\bar{S} = r(\bar{D})$  și fie  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$  o partiție a lui  $D$ . Notăm cu  $\bar{S}_i = r(\bar{D}_i)$  și cu  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  un punct oarecare din  $\bar{S}_i$ .

**Definiția 6.3.1** Se numește integrala de suprafață de prima speță a funcției  $F$  pe suprafața  $S$  și se notează cu  $\iint_S F(x, y, z) d\sigma$  următoarea limită

$$\lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(P_i) \text{aria } S_i, \text{ dacă această limită există și e finită.}$$

(Sensul exact al existenței acestei limite fiind următorul: există  $L \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  cu proprietatea că oricare ar fi partiția  $\rho$  a lui  $D$  cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  și oricare ar fi punctele  $P_i \in \bar{S}_i$  avem  $\left| L - \sum_{i=1}^n F(P_i) \text{aria } S_i \right| < \varepsilon$ ).

**Observația 6.3.1** Dacă  $S$  este o „suprafață materială” neomogenă, a cărei densitate variabilă este descrisă de funcția  $F: \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , atunci  $\sum_{i=1}^n F(P_i) \text{aria } S_i$  aproximează masa suprafeței  $S$ , iar  $\lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(P_i) \text{aria } S_i = \text{masa}(S)$ . Așadar,  $\iint_S F(x, y, z) d\sigma$  reprezintă masa suprafeței materiale  $S$  a cărei densitate variabilă este dată de funcția  $F: \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Teorema 6.3.1** Fie  $S$  o suprafață parametrizată simplă și netedă și fie  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$  o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că  $D$  este un domeniu mărginit care are arie și că  $x, y, z \in C^1(\bar{D})$ . dacă  $F: \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă, atunci există integrala de suprafață de prima speță a funcției  $F$  pe suprafața  $S$  și

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_S F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2}(u, v) du dv \quad (1)$$

*Demonstrație.*

Fie  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$  o partiție oarecare a domeniului  $D$ . O astfel de partiție determină o partiție a suprafeței  $S$  (mai exact a suprafeței lui  $S$ ) și anume:  $S_1, S_2, \dots, S_n$  unde  $S_i = r(D_i)$ . Fie  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  un punct oarecare din  $\bar{S}_i = r(\bar{D}_i)$  și fie  $\pi_n = \sum_{i=1}^n F(P_i) \text{aria}(S_i)$ . Dacă ținem seama de modul de calcul al ariei unei

suprafețe (Definiția 6.2.2), rezultă că  $\pi_n = \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \iint_{D_i} \sqrt{EG - F^2}(u, v) du dv$ .

Pe de altă parte, din teorema de medie a integralei duble, rezultă că există  $(\alpha_i, \beta_i) \in \bar{D}_i$  astfel încât

$$\iint_{D_i} \sqrt{EG - F^2}(u, v) du dv = \sqrt{EG - F^2}(\alpha_i, \beta_i) \text{aria}(D_i).$$

Fie, de asemenea  $(\xi_i, \eta_i) \in \bar{D}_i$  cu proprietatea că  $x_i = x(\xi_i, \eta_i)$ ,  $y_i = y(\xi_i, \eta_i)$  și  $z_i = z(\xi_i, \eta_i)$ . Cu aceste precizări rezultă că:

$$\pi_n = \sum_{i=1}^n F[x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i), z(\xi_i, \eta_i)] \sqrt{EG - F^2}(\alpha_i, \beta_i) \text{aria}(D_i).$$

Dacă notăm cu  $G(u, v) = F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2}(u, v)$ ,  $\forall (u, v) \in \bar{D}$ , atunci suma Riemann corespunzătoare partiției  $\rho$ , funcției  $G$  și punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in \bar{D}_i$  este

$$\sigma_\rho(G, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^n F[x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i), z(\xi_i, \eta_i)] \sqrt{EG - F^2}(\xi_i, \eta_i) \text{aria}(D_i).$$

Deoarece  $G$  este continuă pe  $\bar{D}$ , deci integrabilă pe  $\bar{D}$ , rezultă că există

$$\lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sigma_\rho(G, \xi, \eta) = \iint_D G(u, v) du dv \quad (2)$$

Cum  $F$  este continuă pe  $\bar{S} = r(\bar{D})$  și  $\bar{S}$  este o mulțime compactă (fiind imaginea mulțimii compacte  $\bar{D}$  prin funcția continuă  $r$ ), rezultă că  $F$  este mărginită pe  $\bar{S}$ . Fie  $M > 0$  astfel încât  $|F(x, y, z)| < M$ ,  $\forall (x, y, z) \in \bar{S}$ .

În continuare avem:

$$|\pi_n - \sigma_\rho(G, \xi, \eta)| \leq M \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{EG - F^2}(\alpha_i, \beta_i) - \sqrt{EG - F^2}(\xi_i, \eta_i) \right| \text{aria}(D_i).$$

Pe de altă parte, funcția  $\sqrt{EG - F^2}$  fiind continuă pe mulțimea compactă  $\bar{D}$ , este uniform continuă, deci  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  cu proprietatea că oricare ar fi

punctele  $(u', v')$  și  $(u'', v'')$  din  $\bar{D}$  astfel încât  $|u' - v'| < \delta_\varepsilon$ ,  $|u'' - v''| < \delta_\varepsilon$ , rezultă că

$$\left| \sqrt{EG - F^2}(u', v') - \sqrt{EG - F^2}(u'', v'') \right| < \frac{\varepsilon}{M \cdot \text{aria}(D)} \quad (3)$$

Dacă presupunem acum că  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ , atunci  $|\alpha_i - \xi_i| \leq \text{diam}(D_i) < \delta_\varepsilon$ ,  $|\beta_i - \eta_i| \leq \text{diam}(D_i) < \delta_\varepsilon$ , deci

$$|\pi_n - \sigma_\rho(G; \xi, \eta)| < M \frac{\varepsilon}{M \text{aria}(D)} \sum_{i=1}^n \text{aria}(D_i) = \varepsilon \quad (4)$$

Din (2) și (4) rezultă că există

$$\lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \pi_n = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sigma_\rho(G; \xi, \eta) = \iint_D F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2}(u, v) du dv.$$

**Exemplul 6.3.1** Să se calculeze  $\iint_S (x + y + z) d\sigma$  unde  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z > 0$ . Suprafața  $S$  reprezintă emisfera superioară a sferei cu centrul în origine și de rază  $a$ . O reprezentare parametrică a acestei suprafețe este:  $x = a \sin u \cos v$ ,  $y = a \sin u \sin v$ ,  $z = a \cos u$ ,  $(u, v) \in D = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$  (Vezi Exemplul 6.1.1).

Ținând seama că  $EG - F^2 = a^4 \sin^2 u$ , din Teorema 6.3.1 rezultă:

$$\begin{aligned} \iint_S (x + y + z) d\sigma &= \iint_D (a \sin u \cos v + a \sin u \sin v + a \cos u) a^2 \sin u du dv = \\ &= a^3 \int_0^{\pi/2} du \int_0^{2\pi} (\sin^2 u \cos v + \sin^2 u \sin v + \sin u \cos u) dv = \\ &= a^3 \left( \int_0^{\pi/2} \left( \sin^2 u \sin v \Big|_0^{2\pi} - \sin^2 u \cos v \Big|_0^{2\pi} + v \sin u \cos u \Big|_0^{2\pi} \right) du = \right. \\ &= 2\pi a^3 \frac{\sin^2 u}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \pi a^3. \end{aligned}$$

**Corolarul 6.3.1** Fie  $S: z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  o suprafață netedă explicită, unde  $D$  este un domeniu mărginit care are arie, iar  $f \in C^1(\bar{D})$ . Dacă  $F: \bar{S} \rightarrow \square$  este continuă, atunci:

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F[x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + p^2 + q^2}(x, y) dx dy \quad (5)$$

Afirmația rezultă din Teorema 6.3.1 și din observația că o reprezentare parametrică a suprafeței  $S$  este:  $x = x$ ,  $y = y$ ,  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ .

**Exemplul 6.3.2** Să se calculeze  $\iint_S (xy + yz + zx) d\sigma$ , unde  $S$  este porțiunea din conul  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , decupată de cilindrul  $x^2 + y^2 = 2y$ .

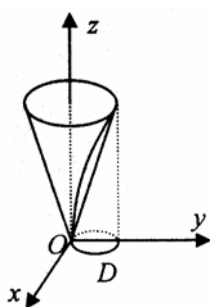


Fig. 1

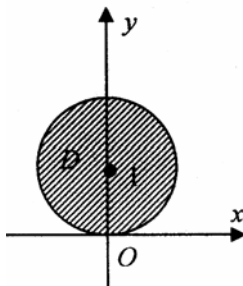


Fig. 2

Observăm că proiecția suprafeței  $S$  în planul  $xOy$  este domeniul  $D: x^2 + y^2 - 2y \leq 0$ . Așadar,

$$S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D.$$

$$\text{În continuare avem } p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ și}$$

$$1 + p^2 + q^2 = 2. \text{ Din corolarul 6.3.1}$$

$$\text{rezultă că: } I = \iint_S (xy + yz + zx) d\sigma = \iint_D \left[ xy + (y + x)\sqrt{x^2 + y^2} \right] \sqrt{2} dx dy.$$

Trecând la coordonate polare:  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $0 \leq \rho \leq 2 \sin \theta$ , obținem:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2 \sin \theta} (\rho^2 \sin \theta \cos \theta + \rho^2 \sin \theta + \rho^2 \cos \theta) \rho d\rho = \\ &= \sqrt{2} \int_0^\pi (\sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta) \frac{\rho^4}{4} \bigg|_0^{2 \sin \theta} d\theta = \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^\pi (\sin^5 \theta \cos \theta + \sin^5 \theta + \sin^4 \theta \cos \theta) d\theta = 4\sqrt{2} \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta = \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta)^2 \sin \theta d\theta = \frac{64\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

**Observația 6.3.2** Dacă suprafața  $S$  este netedă pe porțiuni, adică este o reuniune finită de suprafețe simple netede,  $\bar{S} = \bigcup_{i=1}^p \bar{S}_i$  cu proprietățile:  $S_i$  este simplă și netedă  $\forall i = 1, p$ , două câte două nu au puncte interioare comune ( $S_i \cap S_j = \emptyset$  dacă  $i \neq j$ ) și pentru orice  $i$  și  $j$   $\Gamma_{ij} = \bar{S}_i \cap \bar{S}_j$  este o curbă netedă pe porțiuni (în cazul când este nevidă), atunci

$$\text{aria } S = \sum_{i=1}^p \text{aria } S_i \text{ și } \iint_S F(x, y, z) d\sigma = \sum_{i=1}^p \iint_{S_i} F(x, y, z) d\sigma.$$

## 6.4. INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ DE SPEȚA A DOUA

Pentru a defini integrala de suprafață de speța a doua, trebuie mai întâi să definim orientarea unei suprafețe, problemă asemănătoare cu orientarea unei curbe.

Fie  $S$  o suprafață parametrizată netedă și fie  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$  o reprezentare parametrică a sa. În scriere vectorială,

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in D.$$

Deoarece suprafața  $S$  este netedă, rezultă că  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ , pentru orice  $(u, v) \in D$ . În fiecare punct  $M \in S$ , de coordonate  $M[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$  există doi versori normali la suprafața  $S$  (ortogonali pe planul tangent în punctul  $M$  la suprafața  $S$ ) și anume  $\pm \vec{n}(M)$  unde  $\vec{n}(M) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ .

**Definiția 6.4.1** *Suprafața  $S$  se numește orientabilă (sau cu două fețe) dacă aplicația  $M \rightarrow \vec{n}(M): S \rightarrow \square^3$  este continuă.*

Este evident că dacă aplicația  $M \rightarrow \vec{n}(M): S \rightarrow \square^3$  este continuă, atunci și aplicația  $M \rightarrow -\vec{n}(M): S \rightarrow \square^3$  este continuă. Dacă o suprafață este orientabilă, atunci orientarea sa (sau desemnarea unei fețe a acestei suprafețe) revine la alegerea uneia din cele două aplicații continue  $M \rightarrow \pm \vec{n}(M)$ . Așadar, avem două orientări posibile ale suprafeței  $S$  (sau două fețe ale suprafeței  $S$ ) și anume:  $S_+ = (S, \vec{n})$  care corespunde aplicației continue  $M \rightarrow \vec{n}(M): S \rightarrow \square^3$  și  $S_- = (S, -\vec{n})$  care corespunde aplicației continue  $M \rightarrow -\vec{n}(M): S \rightarrow \square^3$ . Desigur, notația  $S_+$  pentru fața  $(S, \vec{n})$  este arbitrară. Putem foarte bine să notăm cu  $S_+ = (S, -\vec{n})$ . Important este faptul că, odată ales un anumit sens al normalei pentru a desemna o față a suprafeței, cealaltă față va corespunde sensului opus al normalei. O suprafață neorientabilă se mai numește și suprafață cu o singură față.

**Observația 6.4.1** Proprietatea aplicației  $M \rightarrow \vec{n}(M): S \rightarrow \square^3$  de a fi continuă, în cazul unei suprafețe orientabile, este o proprietate globală și se referă la întreaga suprafață  $S$ . Aceasta presupune de pildă următoarea proprietate: fie  $M_0 \in S$  oarecare fixat și fie  $C$  o curbă închisă pe suprafața  $S$  care trece prin  $M_0$  și care nu întâlnește bordura suprafeței  $S$ . Să presupunem că am ales un sens pe normala în  $M_0$  la  $S$  și anume sensul versorului  $\vec{n}(M_0)$ . Deplasând versorul  $\vec{n}(M)$  pe curba  $C$ , plecând din  $M_0$ , revenim în punctul  $M_0$  cu aceeași orientare a normalei, adică

$$\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in C}} \vec{n}(M) = \vec{n}(M_0).$$

**Exemple.**

1. Orice suprafață netedă explicită,  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  are două fețe și anume: fața superioară, care corespunde normalei orientată în sus (care face un unghi ascuțit cu direcția pozitivă a axei  $Oz$ ) și fața inferioară care corespunde normalei orientată în jos.

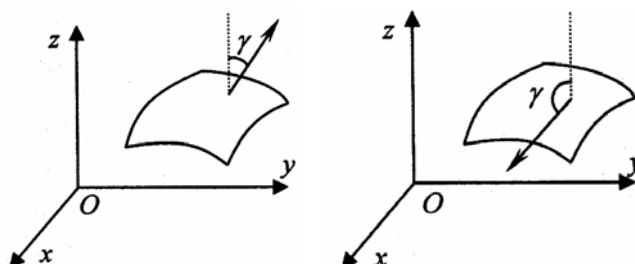


Fig. 1

2. Sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  are două fețe și anume: fața exterioară care corespunde normalei orientată spre exterior și fața interioară care corespunde normalei orientată spre interior.

Într-adevăr, pentru orice punct  $M(x, y, z)$  de pe sferă, versorul normalei exterioare în punctul  $M$  al sferei este:  $\vec{n}(M) = \frac{1}{R} \overrightarrow{OM}$ .

Este ușor de arătat că aplicația  $M \rightarrow \vec{n}(M): S \rightarrow \mathbb{R}^3$  este continuă pe  $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ .

3. Fie  $S$  o suprafață parametrizată netedă și fie  $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ ,  $(u, v) \in D$  o reprezentare parametrică a sa.

Presupunem în plus că  $r: D \rightarrow S$  este homeomorfism, adică  $r$  este bijectivă și bicontinuu ( $r$  și  $r^{-1}$  sunt continue). Atunci  $S = r(D)$  este o suprafață orientabilă.

Într-adevăr, aplicația  $M \rightarrow \vec{n}(M): S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , unde  $\vec{n}(M) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$  este continuă pe

$S$ , pentru că este compunerea funcțiilor continue  $r^{-1}: S \rightarrow D$  și

$$(u, v) \rightarrow \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}: D \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

4. Un exemplu clasic de suprafață cu o singură față (neorientabilă) este așa-numita banda lui Möbius. Un model al acestei suprafețe se obține dacă răsucim o bucată de hârtie dreptunghiulară  $ABCD$  astfel încât punctul  $A$  să coincidă cu  $C$ , iar punctul  $B$  cu  $D$ .

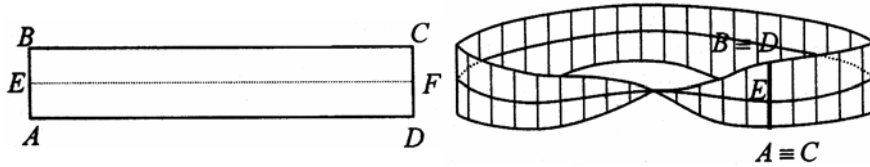


Fig. 2

Este ușor de observat că dacă deplasăm versorul normalei la suprafață plecând din  $E$ , pe curba închisă de pe suprafață corespunzătoare liniei mediane  $EF$ , când revenim în  $E$ , orientarea versorului normalei va fi opusă orientării inițiale a acestuia. Așadar, nu este asigurată continuitatea globală a aplicației

$M \rightarrow \vec{n}(M): S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , deci suprafața nu este orientabilă.

**Definiția 6.4.2** Fie  $S$  o suprafață parametrizată simplă, netedă, orientabilă și fie  $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$ ,  $(u,v) \in D$  o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că  $D$  este un domeniu mărginit care are arie și că  $x, y, z \in C^1(\bar{D})$ . Fie de asemenea  $\vec{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  o funcție vectorială continuă definită prin  $\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ ,  $\forall (x,y,z) \in \Omega$ , unde  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  este un domeniu ce conține suprafața  $S$ . Dacă notăm cu  $S_+ = (S, \vec{n})$  unde

$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ , atunci integrala de suprafață de speța a doua a funcției  $\vec{v}$  pe fața  $S_+$

a suprafeței  $S$ , se definește astfel:

$$\begin{aligned} \iint_{S_+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \\ &= \iint_S [P(x,y,z) \cos \alpha + Q(x,y,z) \cos \beta + R(x,y,z) \cos \gamma] d\sigma \end{aligned} \quad (1)$$

unde  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt unghiurile pe care le face versorul  $\vec{n}$  al normalei la suprafață cu direcțiile pozitive ale axelor de coordonate. Așadar:  $\vec{n}(x,y,z) = \cos \alpha(x,y,z)\vec{i} + \cos \beta(x,y,z)\vec{j} + \cos \gamma(x,y,z)\vec{k}$ ,  $\forall (x,y,z) \in S$ . Dacă  $S_- = (S, -\vec{n})$  este cealaltă față a suprafeței  $S$ , atunci:

$$\iint_{S_-} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S \vec{v} \cdot (-\vec{n}) d\sigma = - \iint_{S_+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

**Observația 6.4.2** Din punct de vedere fizic, integrala de suprafață de speța a doua reprezintă fluxul câmpului de vectori  $\vec{v}$  prin fața  $S_+$  (respectiv  $S_-$ ) a suprafeței  $S$ . Mai precis, să presupunem că  $\vec{v}$  reprezintă câmpul vitezelor particulelor unui fluid în curgere staționară, adică oricare ar fi  $M \in \Omega$ ,  $\vec{v}(M)$  coincide cu viteza particulei de fluid care trece prin  $M$ , viteză care depinde de punctul  $M$ , dar nu depinde de timp. Atunci  $\iint_{S_+} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  reprezintă volumul fluidului care trece în unita-

tea de timp prin suprafața  $S$  în direcția versorului  $\vec{n}$ , ce definește fața  $S_+$  a supra-

feței  $S$ . Dacă notăm cu  $A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}$ ,  $B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$  și  $C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ , atunci  $A$ ,  $B$ ,  $C$

sunt parametrii directori ai normalei la suprafață și  $\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ ,

$\cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ ,  $\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ . Alegerea semnului "+" sau "-"

în fața radientului se face în funcție de orientarea normalei la suprafață.

Ținând seama de modul de calcul al integralei de suprafață de prima speță rezultă:

$$\begin{aligned} \iint_{S_+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \pm \iint_D \{ & P[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] A(u,v) + \\ & + Q[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] B(u,v) + R[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] C(u,v) \} du dv \end{aligned} \quad (2)$$

**Exemplul 6.4.1** Să se calculeze  $\iint_{S_+} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , unde  $S_+$  este

fața exterioară a sferei  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Ecuatiile parametrice ale sferei sunt:

$$\begin{cases} x = R \sin u \cos v \\ y = R \sin u \sin v \\ z = R \cos u \end{cases} \quad u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi].$$

$$A = R^2 \sin^2 u \cos v, \quad B = R^2 \sin^2 u \sin v, \quad C = R^2 \sin^2 u \cos u \quad \text{și}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = R^4 \sin^2 u$$

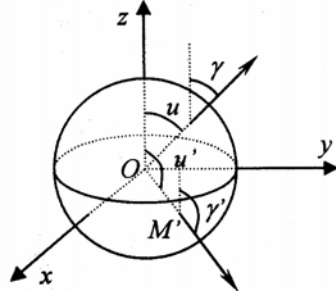
$$\cos \alpha = \pm \sin u \cos v, \quad \cos \beta = \pm \sin u \sin v, \quad \cos \gamma = \pm \cos u \quad (3)$$

Observăm că pentru normala orientată spre exterior trebuie să alegem

semnul "+" în formulele (3). Într-adevăr, dacă  $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  punctul corespunzător  $M$

de pe sferă se află pe emisfera superioară și normala exterioară va face un unghi ascuțit cu axa  $Oz$  ( $\cos \gamma = \cos u > 0$ ).





Dacă  $u \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , punctul corespunzător

$M$  de pe sferă se află pe emisfera inferioară și normala orientată spre exterior va face un unghi obtuz cu axa  $Oz$  ( $\cos \gamma = \cos u < 0$ ).

Din formula de calcul (2) rezultă:

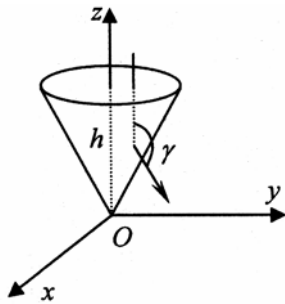
$$\begin{aligned} & \iint_{S_+} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi (R^3 \sin^3 u \cos^2 v + R^3 \sin^3 u \sin^2 v + R^3 \sin u \cos^2 u) du = \\ &= R^3 \cdot 2\pi \int_0^\pi \sin u du = 4\pi R^3. \end{aligned}$$

În cazul unei suprafețe netede explicită  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , avem  $A = -p$ ,

$B = -q$ ,  $C = 1$ , unde  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$  și  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ .

$$\cos \alpha = \frac{-p}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-q}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Dacă  $S_+$  este fața superioară a suprafeței, corespunzătoare normalei orientate în sus, atunci  $\cos \gamma > 0$  și vom alege semnul "+" în fața radicalului. Pentru fața inferioară  $S_-$ ,  $\cos \gamma < 0$  și alegem semnul "-" în fața radicalului.



**Exemplul 6.4.2** Să se calculeze

$$\iint_{S_-} (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy, \text{ unde}$$

$S_-$  este fața inferioară a conului

$$x^2 + y^2 = z^2 : 0 \leq z \leq h. \text{ Așadar avem:}$$

$$S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in D, \text{ unde}$$

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq h^2\}, \quad p = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 1 + p^2 + q^2 = 2. \text{ Deoarece } \cos \gamma < 0, \text{ rezultă că } \cos \gamma = \frac{1}{-\sqrt{2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ și } \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\iint_{S_-} (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \left[ (y-z) \frac{x}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}} + (z-x) \frac{y}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}} + (x-y) \frac{1}{-\sqrt{2}} \right] d\sigma = \\
&= \iint_D \left[ (y-\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}} + (\sqrt{x^2+y^2}-x) \frac{y}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right] \sqrt{2} dx dy = \\
&= 2 \iint_D (y-x) dx dy = 2 \int_0^h (\sin \theta - \cos \theta) d\theta = 0.
\end{aligned}$$

## 6.5. FORMULE INTEGRALE

O primă formulă integrală a fost deja prezentată în Capitolul 5, §5.7 și anume formula lui Green, care stabilește legătura între integrala dublă pe un domeniu și integrala curbilinie de speța a doua pe frontiera acestui domeniu. În cele ce urmează prezentăm alte două formule: formula Gauss-Ostrogradski, care stabilește legătura între integrala triplă și integrala de suprafață și formula Stokes care stabilește legătura între integrala curbilinie și integrala de suprafață.

### Teorema 6.5.1 (Gauss-Ostrogradski)

Fie  $T \subset \square^3$  un domeniu simplu în raport cu cele trei axe de coordonate și fie  $P, Q, R$  trei funcții reale continue, împreună cu derivatele lor  $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  pe  $\bar{T}$ . Presupunem de asemenea că  $S = \bar{T} \setminus T$  (frontiera lui  $T$ ) este o suprafață netedă pe porțiuni. Atunci:

$$\iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{S_e} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy,$$

unde cu  $S_e$  am notat fața exterioară a suprafeței  $S$ .

*Demonstrație.* Deoarece domeniul  $T \subset \square^3$  este simplu în raport cu axa  $Oz$ , rezultă că există un domeniu mărginit  $D \subset \square^2$ , care are arie și două funcții reale, conține pe  $\bar{D}$  proprietatea că  $\varphi(x, y) < \psi(x, y), \forall (x, y) \in D$  astfel încât

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \square^3; \varphi(x, y) < z < \psi(x, y), \forall (x, y) \in D \right\}.$$

Notăm cu  $S_1$  graficul funcției  $z = \varphi(x, y), (x, y) \in \bar{D}$ , cu  $S_2$  graficul funcției  $z = \psi(x, y), (x, y) \in \bar{D}$  și cu  $S_3$  suprafața cilindrică laterală, cu generatoarele paralele cu axa  $Oz$ . Observăm că suprafața  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  este frontiera domeniului  $T$ . Ipoteza că  $S$  este netedă pe porțiuni înseamnă că  $\varphi, \psi \in C^1(\bar{D})$ .

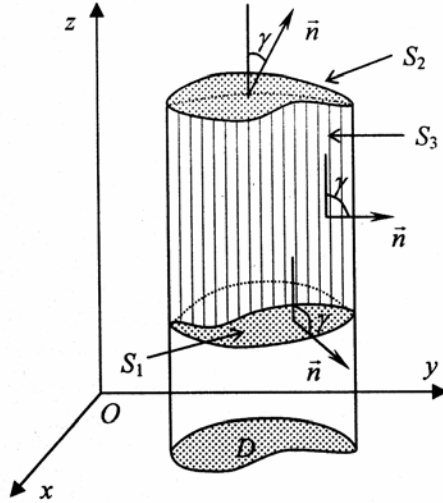


Fig. 1

Fața exterioră a suprafeței  $S$  înseamnă fața corespunzătoare normalei orientate spre exterior. Aceasta înseamnă pentru suprafața  $S_1$ , fața inferioară, iar pentru suprafața  $S_2$ , fața superioară. Așadar

$$S_e = (S_1)_- \cup (S_2)_+ \cup (S_3)_e.$$

Deoarece pentru fața inferioară a suprafeței  $S_1$ , unghiul  $\gamma$  format de normala orientată în jos, cu axa  $Oz$ , este obtuz, rezultă că  $\cos \gamma < 0$ , deci

$$\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}.$$

Mai departe avem:

$$\begin{aligned} \iint_{(S_1)_-} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{S_1} R(x, y, z) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}} d\sigma = \\ &= \iint_D R(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\ &= -\iint_D R[x, y, \varphi(x, y)] dx dy \end{aligned} \quad (1)$$

În mod analog, pentru fața superioară a suprafeței  $S_2$ ,  $\cos \gamma > 0$ , deci

$$\begin{aligned} \iint_{(S_2)_+} R(x, y, z) dx dy &= \\ &= \iint_D R[x, y, \psi(x, y)] \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\ &= \iint_D R[x, y, \psi(x, y)] dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Pentru fața exterioră a suprafeței cilindrice laterale,  $\cos \gamma = 0$ , deoarece unghiul  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ . Rezultă că:

$$\iint_{(S_3)_e} R(x, y, z) dx dy = \iint_{S_3} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = 0 \quad (3)$$

Așadar avem:

$$\begin{aligned} \iint_{S_e} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{(S_1)_-} R(x, y, z) dx dy + \iint_{(S_2)_+} R(x, y, z) dx dy + \iint_{(S_3)_e} R(x, y, z) dx dy = \\ &= \iint_D R[x, y, \psi(x, y)] dx dy - \iint_D R[x, y, \varphi(x, y)] dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

Pe de altă parte, din modul de calcul al integralei triple rezultă:

$$\begin{aligned} \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D \left( \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D R(x, y, z) \Big|_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} dx dy = \\ &= \iint_D R[x, y, \psi(x, y)] dx dy - \iint_D R[x, y, \varphi(x, y)] dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

Din (4) și (5) deducem:

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S_e} R(x, y, z) dx dy \quad (6)$$

În mod analog, folosind faptul că domeniul  $T$  este simplu și în raport cu axele  $Oy$  și  $Ox$  deducem:

$$\iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{S_e} Q(x, y, z) dz dx \quad (7)$$

$$\iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{S_e} P(x, y, z) dx dy \quad (8)$$

În sfârșit, adunând relațiile (6), (7) și (8) obținem formula Gauss-Ostrogradski:

$$\iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{S_e} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \quad (9)$$

**Observația 6.5.1** Printre exemplele de domenii simple în raport cu cele 3 axe de coordonate amintim: sfera, elipsoidul, paralelipipedul dreptunghic cu muchiile paralele cu axele etc. Fără a intra în detalii, menționăm că formula Gauss-Ostrogradski rămâne valabilă și pentru domenii care sunt reuniuni finite de domenii simple în raport cu cele 3 axe de coordonate, două câte două, dintre acestea având în comun cel mult suprafețe netede pe porțiuni. Scriind formula Gauss-Ostrogradski pentru fiecare din domeniile simple  $T_i$ , care alcătuiesc domeniul  $T$ , adunând aceste formule și folosind proprietatea de aditivitate a integralei triple și a integralei de suprafață, se obține formula Gauss-Ostrogradski pentru domeniul  $T$ . Acest lucru se explică prin faptul că integrala de suprafață, pe o suprafață de intersecție a două domenii simple vecine, apare în suma din membrul

drept de două ori, o dată pe fața superioară și o dată pe fața inferioară, deci contribuția ei în membrul drept este nulă. În felul acesta, în membrul drept rămâne numai integrala pe fața exterioară a domeniului  $T$ .

**Observația 6.5.2** Ținând seama de legătura dintre integrala de suprafață de speța a doua și de integrala de suprafață de speța întâi, formula Gauss-Ostrogradski se mai scrie:

$$\iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma \quad (10)$$

unde  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt unghiurile pe care le face normala exterioară la suprafața  $S$  cu  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$ .

Dacă notăm cu  $\vec{V}$  câmpul vectorial de componente  $P, Q, R$ , atunci

$$\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \text{ și } \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \text{ Fie de asemenea,}$$

$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$  versorul normalei exterioare la suprafața  $S$ . Cu aceste precizări, formula Gauss-Ostrogradski devine:

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{V} dx dy dz = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (11)$$

Sub această formă, formula Gauss-Ostrogradski se mai numește și formula flux-divergență.

**Exemplul 6.5.1** Folosind formula Gauss-Ostrogradski să se calculeze

$\iint_{S_e} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , unde  $S_e$  este fața exterioară a cubului

$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$ . Notând cu  $P(x, y, z) = x^2$ ,

$Q(x, y, z) = y^2$  și  $R(x, y, z) = z^2$ , din formula Gauss-Ostrogradski deducem:

$$\begin{aligned} \iint_{S_e} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy &= \iiint_T (2x + 2y + 2z) dx dy dz = \\ &= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz = 2 \int_0^a dx \int_0^a \left( xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a dy = \\ &= 2 \int_0^a dx \int_0^a \left( ax + ay + \frac{a^2}{2} \right) dy = 2 \int_0^a \left( axy + a \frac{y^2}{2} + \frac{a^2}{2} y \right) \Big|_0^a dx = \\ &= 2 \int_0^a \left( a^2 x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} \right) dx = 2 \left( a^2 \frac{x^2}{2} + a^3 x \right) \Big|_0^a = 3a^4. \end{aligned}$$

**Teorema 6.5.2 (Stokes)**

Fie  $S$  o suprafață netedă explicită:  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \bar{D}$ , unde  $D$  este un domeniu mărginit a cărui frontieră  $\gamma$  este o curbă netedă. Presupunem că  $f \in C^2(\bar{D})$  și  $P, Q, R$  sunt trei funcții de clasă  $C^1$  pe un domeniu  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  care include suprafața  $\bar{S}$ . Dacă notăm cu  $\Gamma = \bar{S} \setminus S = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in \gamma\}$  bordura suprafeței  $S$ , atunci avem:

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{S_+} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

(Între sensul de parcurgere al curbei  $\Gamma$  și fața suprafeței pe care se face integrala din membrul drept, există următoarea legătură de compatibilitate<sup>\*)</sup>: dacă curba  $\Gamma$  este parcursă în sens trigonometric (respectiv sensul acelor unui ceasornic), atunci integrala din membrul drept se face pe fața superioară (respectiv inferioară) a suprafeței  $S$ ).

*Demonstrație.* Fie  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in [a, b]$  o reprezentare parametrică a

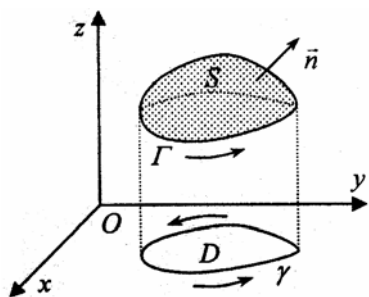


Fig. 2

curbei  $\gamma$ . Atunci  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,

$z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ ,  $t \in [a, b]$  este o reprezentare parametrică a curbei  $\Gamma$ -bordura suprafeței  $S$ .

Ținând seama de modul de calcul al integralei duble de speța a doua avem:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx &= \int_0^a p[\varphi(t), \psi(t), f(\varphi(t), \psi(t))] \varphi'(t) dt = \\ &= \oint_{\gamma} P[x, y, f(x, y)] dx. \end{aligned} \quad (12)$$

În continuare, din formula lui Green rezultă:

$$\oint_{\gamma} P[x, y, f(x, y)] dx = - \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \quad (13)$$

Dacă notăm  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$  și cu  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ , mai departe avem:

<sup>\*)</sup> În ipoteza că sistemul de coordonate este rectangular drept.

$$\begin{aligned}
-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = \\
&= -\iint_S \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma d\sigma = -\iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy
\end{aligned} \tag{14}$$

și

$$\begin{aligned}
-\iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = \\
&= \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta d\sigma = \iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx
\end{aligned} \tag{15}$$

Din (12), (13) și (15) deducem:

$$\oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \tag{16}$$

În mod analog se arată că:

$$\oint_{\Gamma} Q(x, y, z) dy = \iint_{S_+} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_{S_+} \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \tag{17}$$

și

$$\oint_{\Gamma} R(x, y, z) dz = \iint_{S_+} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \iint_{S_+} \frac{\partial R}{\partial x} dz dx \tag{18}$$

Adunând relațiile (16), (17) și (18) obținem formula lui Stokes din enunțul teoremei.

**Observația 6.5.3** Formula lui Stokes rămâne valabilă și pentru suprafețe care sunt reuniuni finite de suprafețe explicite de tipul celei din Teorema 6.4.2, două dintre acestea având în comun arce de curbă care sunt porțiuni din bordurile orientate ale acestor suprafețe. Într-adevăr, scriind formula lui Stokes pentru fiecare din suprafețele  $S_i$  și adunând formulele obținute, rezultă formula lui Stokes pentru

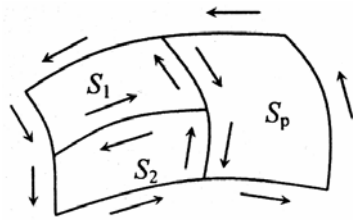


Fig. 3

suprafața  $S = \bigcup_{i=1}^p S_i$ .

Explicația constă în faptul că integrala curbilinie pe o curbă de intersecție a două suprafețe vecine intervine în suma din membrul stâng de două ori, cu orientări diferite, deci contribuția sa în această sumă este nulă. În felul acesta în membrul stâng apare numai integrala curbilinie pe bordura

suprafeței  $S$ . Pe de altă parte este evident că  $\iint_S = \sum_{i=1}^p \iint_{(S_i)}$ .

**Observația 6.5.4** Ținând seama de legătura între integrala de suprafață de speța a doua și integrala de suprafață de speța întâi, formula lui Stokes se mai scrie:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz &= \\ &= \iint_S \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Dacă notăm cu  $\vec{V}$  câmpul vectorial de componente  $P, Q, R$ , atunci

$$\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \text{ și } \operatorname{rot} \vec{V} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Fie de asemenea  $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$  versorul normalei la suprafața  $S$  orientată în sus și fie  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ .

Cu aceste precizări, formula lui Stokes devine:

$$\oint_{\Gamma} \vec{V} d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Integrala din membrul stâng reprezintă circulația câmpului  $\vec{V}$  de-a lungul curbei  $\Gamma$ , iar integrala din membrul drept reprezintă fluxul câmpului  $\operatorname{rot} \vec{V}$  prin suprafața  $S$  în sensul normalei orientate în sus.

**Exemplul 6.5.2** Folosind formula lui Stokes să se calculeze

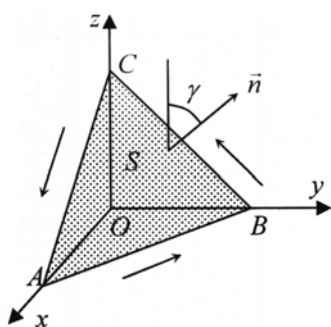


Fig. 4

$\oint_{\Delta ABC} (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$ , unde

$A, B, C$  sunt punctele de coordonate  $A(a, 0, 0)$ ,

$B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ ,  $a > 0, b > 0, c > 0$ .

Planul determinat de punctele  $A, B$  și  $C$  are ecuația  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

Observăm că triunghiul  $ABC$  este bordura suprafeței  $S: z = c \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$ ,  $(x, y) \in D$ ,

unde  $D$  este triunghiul (plin)  $OAB$ .

Notând cu  $P = z - y$ ,  $Q = x - z$  și  $R = y - x$ , din formula lui Stokes rezultă:



$$\oint_{\Delta ABC} (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = \iint_S 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)d\sigma, \text{ unde } \alpha, \beta, \gamma$$

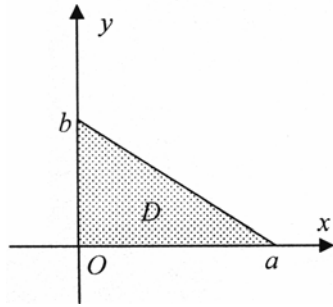


Fig. 5

sunt unghiurile pe care le face normala la suprafața  $S$ , orientată în sus, cu axele  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$ . Cum  $\gamma$  este ascuțit, rezultă  $\cos\gamma > 0$ . Pe

de altă parte avem  $p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a}$ ,  $q = -\frac{c}{b}$  și

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2}. \text{ Rezultă că:}$$

$$\cos\gamma = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{ca}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}. \text{ Cu aceste precizări, rezultă:}$$

$$\oint_{\Delta ABC} (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = \frac{2}{ab} \iint_D (bc + ca + ab)dx dy = bc + ca + ab.$$

## 7. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

### 7.1 NOȚIUNI GENERALE. TEOREMA DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

Prin ecuația diferențială de ordinul întâi înțelegem o ecuație de forma:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

unde  $F$  este o funcție reală definită pe o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^3$ ,  $y = y(x)$  este funcția necunoscută, iar  $y' = \frac{dy}{dx}$  este derivata de ordinul întâi a acesteia.

**Definiția 7.1.1** O funcție  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se numește soluție pentru ecuația diferențială (1) dacă este derivabilă pe  $I$  și  $F[x, \varphi(x), \varphi'(x)] = 0$ ,  $\forall x \in I$  (Se subînțelege că se presupune că  $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$ ,  $\forall x \in I$ ).

Graficul unei soluții a ecuației (1) se mai numește și curbă integrală a ecuației (1). Prin soluție generală înțelegem o familie de soluții  $y = \varphi(x, C)$ , unde  $C$  este o constantă arbitrară. Prin particularizarea constantei  $C$  obținem diferite soluții particulare ale soluției (1).

**Exemplul 7.1.1** Fie ecuația

$$y' = \frac{y}{x}, x \neq 0. \quad (2)$$

Observăm că  $y = Cx$ ,  $x \in (0, \infty)$  este soluția generală a ecuației pe intervalul  $(0, \infty)$ . De asemenea  $y = Cx$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  este soluția generală a ecuației pe intervalul  $(-\infty, 0)$ . Curbele integrale sunt semidreptele care pornesc din originea axelor de coordonate (Fig. 1).

**Exemplul 7.1.2**

$$y' = -\frac{y}{x}, y \neq 0. \quad (3)$$

Observăm că oricare ar fi constanta  $C > 0$ , funcțiile  $y = \pm\sqrt{C^2 - x^2}$ ,  $x \in (-C, C)$  sunt soluții pentru această ecuație pe intervalul  $(-C, C)$ .

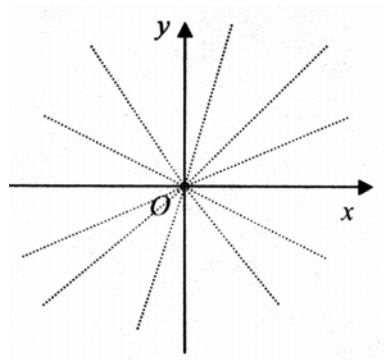


Fig. 1

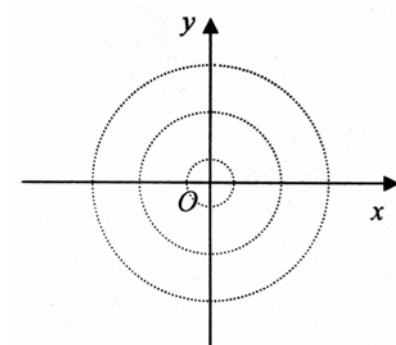


Fig. 2

Curbele integrale sunt semicercurile  $x^2 + y^2 = C^2$ ,  $y > 0$  (respectiv  $y < 0$ ).

**Observația 7.1.1** Există ecuații diferențiale care admit soluții ce nu se pot obține din soluția generală prin particularizarea constantei. O astfel de soluție se numește soluție singulară.

**Exemplul 7.1.3** Fie ecuația

$$y = xy' + y'^2 \quad (4)$$

Soluția generală este  $y = Cx + C^2$ ,  $x \in P$ , așa cum ne dăm seama printr-o verificare directă. Curbele integrale corespunzătoare soluției generale reprezintă o familie de drepte (fig. 3). Constatăm însă

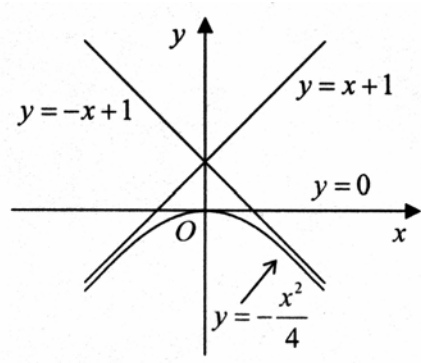


Fig. 3

că ecuația admite și soluția  $y = -\frac{x^2}{4}$ ,  $x \in P$ . Într-adevăr, înlocuind în ecuație obținem identitatea:  $-\frac{x^2}{4} = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4}$ ,

$x \in P$ . Pe de altă parte, este evident că această soluție nu se obține din soluția generală prin particularizarea constantei

$C$ . Așadar,  $y = -\frac{x^2}{4}$ ,  $x \in P$  este o soluție singulară a ecuației (4). Curba sa integrală

este o parabolă (înfășurătoarea familiei de drepte  $y = Cx + C^2$ ).

**Definiția 7.1.2** O ecuație diferențială de forma:

$$y' = f(x, y) \quad (5)$$

unde  $f$  este o funcție reală continuă definită pe o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^2$ , se numește ecuație diferențială de ordinul întâi sub formă normală.

Problema Cauchy pentru ecuația (5) și punctul  $(x_0, y_0) \in D$ , constă în determinarea unei soluții  $\varphi$  a ecuației (5) care verifică condiția inițială:

$$\varphi(x_0) = y_0 \quad (6)$$

Mai precis, problema constă în găsirea unei funcții  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , de clasă  $C^1$  pe intervalul  $I$ , care îndeplinește următoarele condiții:

$$(x, \varphi(x)) \in D, \quad \forall x \in I, \quad \varphi'(x) = f[x, \varphi(x)], \quad \forall x \in I \quad \text{și} \quad \varphi(x_0) = y_0.$$

**Lema 7.1.1** Rezolvarea problemei Cauchy (5) + (6) este echivalentă cu rezolvarea ecuației integrale:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt, \quad x \in I \quad (7)$$

*Demonstrație.* Într-adevăr, dacă  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$  este soluție pentru problema Cauchy (5) + (6) atunci

$$\varphi'(t) = f[t, \varphi(t)], \quad \forall t \in I \quad \text{și} \quad \varphi(x_0) = y_0.$$

Integrând prima identitate, obținem pentru orice  $x \in I$ :

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^x \varphi'(t) dt = \int_{x_0}^x f[t, \varphi(t)] dt.$$

Cum  $\varphi(x_0) = y_0$ , rezultă că  $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \varphi(t)] dt$ ,  $\forall x \in I$ , deci  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$  este soluție pentru ecuația integrală (7).

Reciproc, dacă  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$  este soluție pentru ecuația (7), atunci

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \varphi(t)] dt, \quad \forall x \in I.$$

Evident  $\varphi(x_0) = y_0$ . Pe de altă parte, prin derivare obținem:

$\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$ ,  $\forall x \in I$ , deci  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$  este soluție pentru problema Cauchy (5) + (6).

**Definiția 7.1.3** O funcție  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  este lipschitziană în raport cu  $y$ , pe domeniul  $D$ , dacă există o constantă  $L \geq 0$  astfel încât  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ , oricare ar fi punctele  $(x, y_1)$  și  $(x, y_2)$  din  $D$ .

**Observația 7.1.2** Dacă  $D$  este deschisă și convexă,  $f \in C^1(D)$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}$  este mărginită pe  $D$ , atunci  $f$  este lipschitziană în raport cu  $y$  pe  $D$ .

Într-adevăr, fie  $M > 0$  astfel încât  $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < M, \forall (x, y) \in D$ . Din teorema creșterilor finite a lui Lagrange deducem că oricare ar fi punctele  $(x, y_1)$  și  $(x, y_2)$  din  $D$ , există un punct  $\xi$  între  $y_1$  și  $y_2$  astfel încât

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y_1 - y_2). \text{ În continuare avem:}$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|, \text{ deci } f \text{ este lipschitziană pe } D.$$

**Teorema 7.1.1** (Teorema de existență și unicitate)

Fie  $f: \bar{D} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă și lipschitziană în raport cu  $y$ , pe  $\bar{D}$ . Atunci există o soluție unică  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I \subset (x_0 - a, x_0 + a)$ , a problemei Cauchy  $y' = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ ,  $y(x_0) = y_0$ .

*Demonstrație.* Cum  $f$  este continuă pe mulțimea compactă  $\bar{D}$ , rezultă că  $f$

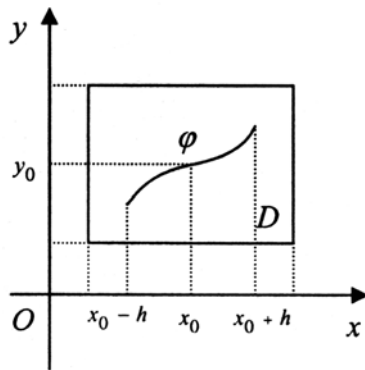


Fig. 4

este mărginită pe  $\bar{D}$ . Fie  $M > 0$  astfel încât  $|f(x, y)| < M, \forall (x, y) \in \bar{D}$ . Fie de asemenea,  $L$  constanta lui Lipschitz,  $\alpha \in (0, 1)$  un număr oarecare și

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{\alpha}{L} \right\}. \text{ Notăm cu } I \text{ intervalul}$$

$$[x_0 - h, x_0 + h] \text{ și cu}$$

$$F = \{ g: I \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]; g - \text{continuă} \}$$

. Observăm că  $F$  nu este un spațiu vectorial, deoarece nu este închis la operația de adunare. Constatăm însă că  $F$  este un spațiu metric, în raport cu distanța

$$d(g_1, g_2) = \sup \{ |g_1(x) - g_2(x)|; x \in I \}, \forall g_1, g_2 \in F \quad (8)$$

Mai mult,  $F$  este un spațiu metric complet. Într-adevăr, dacă  $\{g_n\}$  este un șir fundamental de funcții din  $F$ , atunci  $\{g_n\}$  este un șir fundamental în spațiul Banach  $C(I) = \{g: I \rightarrow \mathbb{R}, g - \text{continuă}\}$ , înzestrat cu norma  $\|g\| = \sup \{ |g(x)|, x \in I \}$ .

Rezultă că  $\{g_n\}$  este convergent în  $C(I)$ , deci există  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ , continuă, astfel încât  $d(g_n, g) = \|g_n - g\| \rightarrow 0$ . Este clar însă, că dacă  $g_n \in F$  și  $g_n \rightarrow g$ , atunci  $g \in F$ . Așadar,  $(F, d)$  este un spațiu metric complet.

Definim aplicația  $T: F \rightarrow F$  astfel:

$$T(g)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, g(t)] dt, \quad \forall g \in F, \quad \forall x \in I \quad (9)$$

Observăm că  $T(g)$  este o funcție continuă pe  $I$  și că

$$|T(g)(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, g(t))| dt \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq M \cdot \frac{b}{M} = b.$$

Rezultă că  $T(g) \in F, \quad \forall g \in F$ .

Mai mult, vom arăta că  $T$  este o contracție. Într-adevăr, ținând seama că  $F$  este lipschitziană în raport cu a doua variabilă, rezultă:

$$\begin{aligned} |T(g_1)(x) - T(g_2)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x |f[t, g_1(t)] - f[t, g_2(t)]| dt \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |g_1(t) - g_2(t)| dt \right| \leq Ld(g_1, g_2)|x - x_0| \leq Ld(g_1, g_2)h \leq \alpha d(g_1, g_2), \end{aligned}$$

$\forall x \in I$ .

Trecând la marginea superioară obținem:

$$d(T(g_1), T(g_2)) = \sup\{|T(g_1)(x) - T(g_2)(x)|; x \in I\} \leq \alpha d(g_1, g_2).$$

Cum  $\alpha \in (0, 1)$ , deducem că  $T : F \rightarrow F$  este o contracție.

Din teorema de punct fix a lui Banach (Teorema 3.1.8 din [10]) rezultă că există  $\varphi \in F$  unică, astfel încât  $T(\varphi) = \varphi$ . Așadar, avem:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \varphi(t)] dt, \quad \forall x \in I.$$

Din Lema 7.1.1 deducem că  $\varphi$  este o soluție unică pentru problema Cauchy  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  și cu aceasta teorema este demonstrată.

**Observația 7.1.3** Teorema 7.1.1 ne dă o primă metodă aproximativă de rezolvare a problemei Cauchy și anume metoda aproximațiilor succesive. Așa cum știm din teorema de punct fix a lui Banach, soluția  $\varphi$  a problemei Cauchy este limita în raport cu distanța, definită în (8), a șirului aproximațiilor succesive  $\{y_n\}$ , unde:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt, & x \in I \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_1(t)] dt, & x \in I \\ \hline y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt, & x \in I \\ \hline \end{aligned}$$

Cum convergența în raport cu distanța (8) este echivalentă cu convergența uniformă, rezultă că  $y_n \xrightarrow{u} \varphi$ .

**Exemplul 7.1.4** Să se rezolve problema Cauchy

$$y' = y, (x, y) \in D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], y(0) = 1.$$

Se observă imediat că soluția acestei probleme Cauchy este

$$\varphi(x) = e^x, x \in I \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Pe de altă parte, avem  $f(x, y) = y, (x, y) \in D, x_0 = 0, y_0 = 1, a = b = \frac{1}{2},$

$$M = \frac{3}{2} \text{ și } L = 1.$$

Dacă alegem  $\alpha = \frac{1}{2}$  atunci  $h = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$ , deci  $I = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ .

Șirul aproximațiilor succesive arată astfel:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x, \quad x \in I$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad x \in I$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1+t+\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}, \quad x \in I$$

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in I$$

Cum  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  și convergența este uniformă pe  $P$ , rezultă că  $y_n \xrightarrow{u} e^x$ .

**Observația 7.1.4** În exemplul 7.1.4 am putut afla limita șirului aproximațiilor succesive. De regulă, acest lucru nu este posibil și de aceea vom aproxima limita acestui șir cu funcția determinată la pasul  $n$ . Cu alte cuvinte  $\varphi \approx y_n$ . Așa cum știm de la teorema de punct fix a lui Banach, eroarea satisface inegalitatea:

$$|\varphi(x) - y_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \text{dist}(y_0, y_1), \quad \forall x \in I.$$

Cum  $\text{dist}(y_0, y_1) = \sup \left\{ \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right|; x \in I \right\} \leq M \cdot h$ , rezultă că

$$|\varphi(x) - y_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot Mh, \quad \forall x \in I.$$

## 7.2 ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI DE FORME PARTICULARE

### 7.2.1. Ecuatii cu variabile separabile

O ecuație cu variabile separabile este o ecuație de forma:

$$f_1(x)g_1(y)y' + f_2(x)g_2(y) = 0 \quad (10)$$

unde  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții continue,  $f_1 \neq 0$  pe  $I$ ,

$g_1, g_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții continue,  $g_2 \neq 0$  pe  $J$ .

Împărțind cu  $f_1(x)g_2(y)$  ecuația devine:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)} dx \quad (11)$$

Integrând, obținem:

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = -\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)} dx.$$

**Exemplu**  $(1+x^2)yy' + x(1+y^2) = 0$ .

Ecuatia se pune sub forma echivalentă  $\frac{y}{1+y^2} dy = -\frac{x}{1+x^2} dx$ .

Integrând obținem:  $\int \frac{y}{1+y^2} dy = -\int \frac{x}{1+x^2} dx$ ,

deci  $\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln C$ ,

sau  $1+y^2 = \frac{C}{1+x^2}$ ,  $C > 0$ .

Dacă ne interesează soluția care îndeplinește condiția inițială  $y(1) = 2$ ,

obținem  $C = 10$  și mai departe  $y = \pm \sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}}$ . Evident, soluția căutată este

$$y = \sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}}, \quad x \in (-3, 3).$$

### 7.2.2. Ecuatii omogene

Sunt ecuații de forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (12)$$

unde  $f$  este o funcție continuă pe un interval  $I$ .



Dacă notăm cu  $u = \frac{y}{x}$  și considerăm  $u = u(x)$  noua funcție necunoscută, rezultă  $y(x) = xu(x)$  și  $y' = u + x \cdot u'$ . În urma acestei schimbări de funcție necunoscută, ecuația (12) devine o ecuație cu variabile separabile, anume:  $u + x \cdot u' = f(u)$ .

Cazul  $f(u) = u$  a fost prezentat în Exemplul 7.1.1. Putem deci presupune că  $f(u) \neq u$ . Separând variabilele obținem:

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \text{ și mai departe } \int \frac{du}{f(u)-u} = \ln x + \ln C.$$

**Exemplu**  $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, x \neq 0.$

Notând cu  $u = \frac{y}{x}$  obținem  $u + xu' = u + u^2$ , deci  $\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$ . Integrând rezultă  $-\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C$  și mai departe  $-\frac{x}{y} = \ln C|x|$ . Din această relație se obțin soluțiile corespunzătoare diferitelor condiții inițiale. De exemplu, soluția care îndeplinește condiția inițială  $y(2) = 1$  este  $y = \frac{x}{2 + \ln 2 - \ln x}, x \in (0, 2e^2)$ .

### 7.2.3. Ecuații liniare

Ecuațiile liniare neomogene sunt ecuații de forma:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (13)$$

unde  $P$  și  $Q$  sunt funcții continue pe un interval  $I$ .

Ecuația liniară omogenă asociată este

$$y' + P(x)y = 0 \quad (14)$$

Observăm că ecuația omogenă (14) este o ecuație cu variabile separabile.

Separând variabilele și integrând obținem:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \quad y \neq 0$$

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C \text{ și mai departe}$$

$$y = C e^{-\int P(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Deși soluția (15) s-a obținut în ipoteza  $y \neq 0$ , care presupune  $C \neq 0$ , observăm că ecuația (14) admite și soluția  $y = 0$  care s-a pierdut la împărțirea cu  $y$ . Așadar (15) reprezintă soluția generală a ecuației omogene (14).

Pentru a obține soluția generală a ecuației neomogene (13) folosim metoda variației constantei a lui Lagrange și anume: căutăm soluția ecuației neomogene (13) de forma

$$y = \varphi(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (16)$$

unde  $\varphi$  este o funcție de clasă  $C^1$  pe intervalul  $I$ . Pentru determinarea funcției  $\varphi$  punem condiția ca (16) să fie soluție pentru ecuația (13) și obținem:

$$\varphi'(x)e^{-\int P(x)dx} - \varphi(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)\varphi(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Efectuând calculele rezultă

$$\varphi'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \text{ și mai departe } \varphi(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Înlocuind în (16) obținem soluția generală a ecuației neomogene (13) și anume:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left( C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right) \quad (17)$$

**Exemplu**  $y' + y \sin x = -\sin x \cos x$

Avem  $P(x) = \sin x$  și  $Q(x) = -\sin x \cos x$ .

Înlocuind în (17) obținem:

$$y = e^{\cos x} \left( C - \int \sin x \cos x e^{-\cos x} dx \right) = e^{\cos x} \left( C - e^{-\cos x} \cos x - e^{-\cos x} \right),$$

deci  $y = C e^{\cos x} - \cos x - 1$ .

#### 7.2.4. Ecuații Bernoulli

Sunt ecuații de forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1 \quad (18)$$

Presupunem că  $P$  și  $Q$  sunt funcții continue pe un interval  $I$ . Împărțind cu  $y^\alpha$  pentru  $y \neq 0$  obținem:  $y^\alpha y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x)$ .

Dacă facem schimbarea de funcție  $y^{1-\alpha} = z$ , unde  $z = z(x)$  este noua funcție necunoscută, rezultă  $(1-\alpha)y^{1-\alpha} \cdot y' = z'$  și mai departe

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x) \quad (19)$$

Observăm că am obținut o ecuație liniară.

**Exemplu**  $y' - \frac{y}{3x} = \frac{1}{3}y^4 \ln x, \quad x \in (0, \infty)$ .

Împărțind cu  $y^4$  pentru  $y \neq 0$  rezultă  $y^{-4} \cdot y' - \frac{1}{3x}y^{-3} = \frac{1}{3} \ln x$ .

Dacă notăm cu  $z = y^{-3}$ , atunci  $z' = -3y^{-4}y'$  și ecuația devine:

$z' + \frac{1}{x}z = -\ln x$ . Aceasta este o ecuație liniară cu  $P(x) = \frac{1}{x}$  și  $Q(x) = -\ln x$ .

Folosind formula (17) obținem:

$$z = e^{-\ln x} \left( C - \int \ln x e^{\ln x} dx \right) = \frac{1}{x} \left( C - \int x \ln x dx \right)$$

și mai departe  $z = \frac{C}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2} \ln x$ . Așadar avem:  $y^{-3} = \frac{C}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2} \ln x$ ,  $x > 0$ ,  $y \neq 0$ .

Diferite soluții particulare se obțin precizând condițiile inițiale.

### 7.2.5. Ecuatii Riccati

Sunt ecuații de forma

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (20)$$

unde  $P$ ,  $Q$  și  $R$  sunt funcții continue pe un interval  $I$ . Dacă se cunoaște o soluție particulară a ecuației (20), anume  $y_p: J \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ , atunci efectuând schimbarea de

funcție  $y = y_p + \frac{1}{z}$ , ecuația se reduce la o ecuație liniară. Într-adevăr, derivând și înlocuind în ecuația (20) obținem:

$$y'_p - \frac{z'}{z^2} = P(x) \left( y_p^2 + 2 \frac{y_p}{z} + \frac{1}{z^2} \right) + Q(x) \left( y_p + \frac{1}{z} \right) + R(x).$$

Ținând seama că  $y_p$  verifică ecuația (20), deci că

$$y'_p = P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x), \text{ rezultă}$$

$$z' + [2y_p P(x) + Q(x)]z = -P(x). \quad (21)$$

Observăm că ecuația (21) este o ecuație liniară.

**Exemplu**  $y' = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3x^2}$ ,  $x \in (0, \infty)$ .

Observăm că  $y = \frac{1}{x}$  este o relație particulară a ecuației. Facem schimbarea

de funcție  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$  și obținem:

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2} \right) - \frac{2}{3x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3xz} - \frac{1}{3z^2}.$$

Rezultă următoarea ecuație liniară:

$$z' - \frac{2}{3x}z = \frac{1}{3}, \text{ a cărei soluție generală este } z = Cx^{\frac{2}{3}} + x.$$

Soluția generală a ecuației Riccati este:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{\frac{2}{3}} + x}, x \in (0, \infty), C > 0.$$

### 7.2.6. Ecuația Clairaut

Sunt ecuații de forma:

$$y = xy' + \varphi(y') \quad (22)$$

unde  $\varphi$  este o funcție de clasă  $C^1$  pe un interval  $J$ .

Notând  $y' = p$  ecuația devine  $y = x \cdot p + \varphi(p)$ .

Derivând în raport cu  $x$  obținem:  $p = p + x \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dp}{dx}$ , deci

$$[x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0.$$

Dacă  $\frac{dp}{dx} = 0$ , rezultă  $p = C$  și mai departe

$$y = Cx + \varphi(C) \quad (23)$$

Familia de soluții (23) reprezintă soluția generală a ecuației (22). Din punct de vedere geometric, curbele integrale corespunzătoare acestei soluții sunt drepte.

Pe de altă parte, din  $x + \varphi'(p) = 0$ , obținem soluția singulară

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p) \\ y = -p\varphi'(p) + \varphi(p) \end{cases} \quad (24)$$

Curba integrală corespunzătoare soluției singulare (24) este înfășurătoarea familiei de drepte (23).

**Exemplu**  $y = xy' - \frac{y'^2}{2}.$

Soluția generală este  $y = Cx - \frac{C^2}{2}$ ,  $C \in \mathbb{P}$ .

Soluția singulară sub formă parametrică este:

$$\begin{cases} x = p \\ y = \frac{p^2}{2} \end{cases}.$$

Eliminând pe  $p$  între cele două ecuații parametrice obținem  $y = \frac{x^2}{2}$ , adică o parabolă.

### 7.2.7. Ecuații cu diferențiale exacte. Factor integrant

Sunt ecuații diferențiale de forma:

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \quad (25)$$

unde  $P$  și  $Q$  sunt funcții de clasă  $C^1$  pe dreptunghiul  $D = (a, b) \times (c, d)$ ,  $Q \neq 0$  pe  $D$  și  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  pe  $D$ . Fie  $(x_0, y_0) \in D$  un punct oarecare fixat și fie  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ , definită astfel:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt, \quad (x, y) \in D \quad (26)$$

**Propoziția 7.2.7** În condițiile de mai sus, orice funcție implicită  $y = \varphi(x)$  definită de ecuația  $F(x, y) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , este soluție pentru ecuația diferențială (25) și orice soluție a ecuației (25) este de această formă.

*Demonstrație.* Pentru început vom arăta că  $\frac{\partial F}{\partial x} = P$  și  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ . Într-adevăr, ținând seama de formula de derivare a integralei cu parametru și de ipoteza

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \text{ rezultă}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t) dt = P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial P}{\partial t}(x, t) dt = \\ &= P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y). \end{aligned}$$

De asemenea, avem:  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$ . Așadar, funcția  $F$  definită în (26) are proprietatea că  $\frac{\partial F}{\partial x} = P$  și  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ . Cu alte cuvinte forma diferențială

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ este exactă.}$$

Fie ecuația

$$F(x, y) = C, \quad (x, y) \in D \quad (27)$$

Deoarece  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q \neq 0$  pe  $D$ , rezultă că în vecinătatea oricărui punct din  $D$  ecuația (27) definește o funcție implicită  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$ . Deoarece  $F[x, \varphi(x)] = 0$ ,

$$\forall x \in I, \text{ derivând obținem } \frac{\partial F}{\partial x}[x, \varphi(x)] + \frac{\partial F}{\partial y}[x, \varphi(x)] \cdot \varphi'(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Ținând seama că  $\frac{\partial F}{\partial x} = P$  și  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ , deducem că

$$P[x, \varphi(x)] + Q[x, \varphi(x)] \cdot \varphi'(x) = 0, \quad \forall x \in I, \text{ deci } y = \varphi(x), x \in I \text{ este soluție pentru ecuația (25).}$$

Reciproc, fie  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$  o soluție a ecuației (25). Atunci,  $\forall x \in I$  avem  $(x, \varphi(x)) \in D$  și  $P[x, \varphi(x)] + Q[x, \varphi(x)] \cdot \varphi'(x) = 0$ . Deoarece  $\frac{\partial F}{\partial x} = P$  și  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$  rezultă  $\frac{\partial F}{\partial x}[x, \varphi(x)] + \frac{\partial F}{\partial y}[x, \varphi(x)] \cdot \varphi'(x) = 0$ ,  $\forall x \in I$ , ceea ce este echivalent cu  $\frac{d}{dx}(F(x, \varphi(x))) = 0$ ,  $\forall x \in I$ .

Din ultima relație deducem că  $F[x, \varphi(x)] = C$ ,  $\forall x \in I$ , deci  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$  este o funcție implicită definită de ecuația (27).

**Exemplul 7.2.7** Să se afle soluțiile ecuației

$$(3x^2 - y) + (3y^2 - x)y' = 0, (x, y) \in \square^2 \setminus \{(3a^2, a); a \in \square\}.$$

$$\text{Avem } P(x, y) = 3x^2 - y, Q(x, y) = 3y^2 - x, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -1.$$

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x (3t^2 - y_0) dt + \int_{y_0}^y (3t^2 - x) dt = x^3 + y^3 - xy + x_0 y_0 - x_0^3 - y_0^3.$$

Așadar, orice soluție a ecuației date este de forma  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$ , unde  $\varphi$  este o funcție implicită definită de ecuația  $x^3 + y^3 - xy = K$ .

**Observația 7.2.7** Dacă  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , atunci se caută un factor integrant. Prin factor integrant se înțelege o funcție  $\mu = \mu(x, y)$ ,  $\mu \in C^1(D)$ ,  $\mu \neq 0$  pe  $D$  cu proprietatea

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, y)Q(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)P(x, y)], (x, y) \in D \quad (28)$$

Așadar, să presupunem că avem ecuația diferențială

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0, Q \neq 0 \text{ pe } D \text{ și } \frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y} \quad (29)$$

Dacă reușim să găsim un factor  $\mu = \mu(x, y)$  și înmulțim ecuația (29) cu acest factor integrant, obținem ecuația echivalentă  $\mu(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)Q(x, y)y' = 0$ , care este de tipul (25) și a cărei soluție se află în conformitate cu Propoziția 7.2.7. Determinarea factorului integrant se face prin încercări. Să căutăm pentru început un factor integrant de forma  $\mu = \mu(x)$

(care depinde numai de  $x$ ). Din (28) rezultă  $\mu'(x)Q(x, y) + \mu(x)\frac{\partial Q}{\partial x} = \mu(x)\frac{\partial P}{\partial y}$  și mai departe

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \quad (30)$$

Pentru ca egalitatea (30) să fie posibilă trebuie ca expresia  $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$  să depindă numai de  $x$ .

Așadar, ecuația (29) admite factor integrant  $\mu = \mu(x)$ , dacă  $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$  depinde numai de  $x$ . Să notăm cu  $\varphi(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ . Atunci  $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \varphi(x)$  și integrând obținem  $\ln|\mu(x)| = \int \varphi(x)dx + C$ .

Putem alege factorul integrant  $\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$ .

**Exemplu** Fie ecuația  $(1-x^2y) + x^2(y-x)y' = 0$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq y$ . Avem

$$P = 1 - x^2y, \quad Q = x^2(y-x), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 3x^2 \neq \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = -\frac{2}{x}.$$

Rezultă că  $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$ . Amplificând ecuația dată cu acest factor integrant obținem

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right) + (y-x)y' = 0.$$

Fie  $P_1 = \frac{1}{x^2} - y$  și  $Q_1 = y - x$ . Observăm că  $\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -1$ .

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{t^2} - y_0\right)dt + \int_{y_0}^y (t-x)dt = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy + K.$$

Soluția ecuației va fi orice funcție implicită  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$  definită de ecuația  $\frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy = C$ .

În mod analog, se arată că ecuația (29) cu  $P \neq 0$ , admite un factor integrant depinzând numai de  $y$  ( $\mu = \mu(y)$ ) dacă expresia  $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}$  depinde numai de  $y$ .

**Exemplu** Fie ecuația  $y^2(2x-3y) + (7-3xy^2)y' = 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $2x \neq 3y$ ,  $7 \neq 3xy^2$ . Avem

$$P = y^2(2x-3y), \quad Q = 7-3xy^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 4xy-9y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3y^2;$$

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = -\frac{2}{y}; \quad \mu(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Înmulțind ecuația inițială cu  $\frac{1}{y^2}$  obținem ecuația echivalentă

$$2x-3y + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)y' = 0.$$

$$P_1 = 2x-3y; \quad Q_1 = \frac{7}{y^2} - 3x; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial P_1}{\partial y} = -3.$$

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x (2t-3y_0)dt + \int_{y_0}^y \left(\frac{7}{t^2} - 3x\right)dt = x^2 - 3xy - \frac{7}{y} + C.$$

Orice funcție implicită  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$  definită de ecuația  $x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = K$  este soluția pentru ecuația dată.

Dacă ecuația nu admite factori integranți de forma  $\mu = \mu(x)$  sau  $\mu = \mu(y)$  se caută factori integranți de forme mai complicate  $\mu = \mu(xy)$ ,  $\mu = \mu(ax+by)$ ,  $\mu = \mu\left(\frac{x}{y}\right)$  etc.

### 7.3. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL $n$

Prin ecuație diferențială liniară de ordinul  $n$  înțelegem orice ecuație de forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \quad x \in J \quad (1)$$

unde  $b$  și  $a_i$ ,  $i = \overline{0, n}$  sunt funcții continue pe intervalul  $J$  și  $a_0(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in J$ .

Ecuația omogenă asociată este

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad x \in J \quad (2)$$

Dacă notăm cu  $D = \frac{d}{dx}$  (operatorul de derivare), cu



$D^p = \underbrace{D \circ D \circ \dots \circ D}_{p \text{ ori}} = \frac{d^p}{dx^p}$ , cu  $I$  operatorul identitate pe spațiul funcțiilor de clasă  $C^{(n)}$  pe  $J$ ,  $\left[ I(y) = y, \forall y \in C^{(n)}(J) \right]$  și cu  $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n I$ , atunci ecuațiile (1) și (2) devin:

$$L(D)(y) = f(x) \quad (1')$$

$$L(D)(y) = 0 \quad (2')$$

Prin soluție a ecuației (1) (respectiv (1')), înțelegem orice funcție  $\varphi \in C^{(n)}(J)$  care verifică ecuația:

$$L(D)(\varphi(x)) = f(x) \text{ [respectiv } L(D)(\varphi(x)) = 0], \forall x \in J.$$

Notăm cu  $S$  mulțimea soluțiilor ecuației omogene (2).

**Observația 7.3.1**  $S$  este un spațiu vectorial real. Într-adevăr, deoarece operatorul de derivare  $D$  este liniar, rezultă că operatorul  $L(D)$  este liniar.

Fie  $y_1, y_2 \in S$  și  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Atunci

$$L(D)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(D)(y_1) + \alpha_2 L(D)(y_2) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0,$$

deci  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in S$ .

**Definiția 7.3.1** Fie  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n$  funcții de clasă  $C^{(n-1)}$  pe intervalul  $J$ . Se numește wronskianul acestor funcții, următoarea funcție:

$$W(x) = W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \quad \forall x \in J.$$

**Propoziția 7.3.1** Fie  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ,  $n$ -funcții de clasă  $C^{(n-1)}$  pe intervalul  $J$ . Dacă  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  sunt liniar dependente pe  $J$ , atunci  $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) = 0$ ,  $\forall x \in J$ .

*Demonstrație.*

Prin ipoteză există  $n$  numere reale  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , nu toate nule, astfel încât:

$$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x) = 0, \quad \forall x \in J \quad (3)$$

Derivând succesiv relația (3) de  $(n-1)$  ori obținem:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 \varphi_1'(x) + \lambda_2 \varphi_2'(x) & + \dots + & \lambda_n \varphi_n'(x) & = & 0 \\ \hline \lambda_1 \varphi_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 \varphi_2^{(n-1)}(x) & + \dots + & \lambda_n \varphi_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{array}, \quad \forall x \in J.$$

Am obținut astfel un sistem (algebric) liniar și omogen de  $n$ -ecuații cu  $n$ -necunoscute. Deoarece sistemul admite soluție nebanală (prin ipoteză cel puțin una din necunoscutele  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  este diferită de 0) rezultă că determinantul coeficienților este zero. Așadar, avem

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in J.$$

**Propoziția 7.3.2** Fie  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ,  $(n-1)$  funcții de clasă  $C^{(n)}$  pe intervalul  $J$  cu proprietățile:

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](x) \neq 0, \quad \forall x \in J.$$

$$W[\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](x) = 0, \quad \forall x \in J.$$

Atunci, există  $n$  constante reale  $C_1, C_2, \dots, C_n$  astfel încât

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x), \quad \forall x \in J.$$

*Demonstrație.* Pentru simplificarea scrierii facem demonstrația în cazul particular  $n = 2$ . Prin ipoteză avem:

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi'(x) & \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \\ \varphi''(x) & \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in J \quad (4)$$

Deoarece coloanele 2 și 3 ale acestui determinant sunt liniar independente (prin ipoteză  $W[\varphi_1, \varphi_2](x) \neq 0, \forall x \in J$ ) rezultă că prima coloană a determinantului (4) este combinație liniară de acestea. Așadar,  $\forall x \in J$ , există  $\lambda_1(x), \lambda_2(x) \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$\begin{cases} \varphi(x) = \lambda_1(x)\varphi_1(x) + \lambda_2(x)\varphi_2(x) \\ \varphi'(x) = \lambda_1(x)\varphi_1'(x) + \lambda_2(x)\varphi_2'(x) \\ \varphi''(x) = \lambda_1(x)\varphi_1''(x) + \lambda_2(x)\varphi_2''(x) \end{cases} \quad (5)$$

Deoarece, din primele 2 ecuații din (5),  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  se pot exprima în funcție de  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$  și de derivatele de ordinul întâi ale acestora, iar  $\varphi \in C^2(J)$ , rezultă că  $\lambda_1, \lambda_2 \in C^1(J)$ . Derivând prima relație din (5) obținem:

$$\varphi'(x) = \lambda_1(x)\varphi_1'(x) + \lambda_2(x)\varphi_2'(x) + \lambda_1'(x)\varphi_1(x) + \lambda_2'(x)\varphi_2(x).$$

Ținând seama de a doua relație din (5) deducem

$$\lambda_1'(x)\varphi_1(x) + \lambda_2'(x)\varphi_2(x) = 0.$$

În mod analog, derivând a doua relație din (5) și ținând seama de a treia relație din (5) deducem

$$\lambda_1'(x)\varphi_1'(x) + \lambda_2'(x)\varphi_2'(x) = 0.$$

Am obținut un sistem linear și omogen de 2 ecuații cu 2 necunoscute:  $\lambda_1'(x)$  și  $\lambda_2'(x)$ . Deoarece, prin ipoteză determinantul coeficienților

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = W[\varphi_1, \varphi_2](x) \neq 0,$$

rezultă că sistemul admite numai soluția banală. Așadar,

$$\lambda_1'(x) = 0, \quad \lambda_2'(x) = 0, \quad \forall x \in J; \text{ deci}$$

$$\lambda_1(x) = C_1, \quad \lambda_2(x) = C_2, \quad \forall x \in J.$$

Conform primei relații din (5) avem:

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x), \quad \forall x \in J.$$

### **Teorema 7.3.1** (Liouville)

*Fie  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ,  $n$ -soluții particulare ale ecuației omogene (2), fie*

*$W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$ ,  $x \in J$  și  $x_0 \in J$  oarecare fixat. Atunci, pentru orice  $x \in J$  avem:*

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} \quad (6)$$

*Demonstrație.* Prezentăm demonstrația pentru cazul particular  $n = 2$ . Fie  $y_1, y_2$ , soluții particulare ale ecuației (2). Atunci avem

$$y_i'' = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_i' - \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y_i, \quad i = 1, 2, \quad x \in J \quad (7)$$

Pe de altă parte, derivând funcția  $W$ ,  $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ ,  $x \in J$ , obținem

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}.$$

Ținând seama de relațiile (7) și de proprietățile determinantilor, deducem:

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -\frac{a_1}{a_0} y_1' - \frac{a_2}{a_0} y_1 & -\frac{a_1}{a_0} y_2' - \frac{a_2}{a_0} y_2 \end{vmatrix} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Prin urmare avem

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x), \quad \forall x \in J \quad (8)$$

Ecuația diferențială (8) este o ecuație liniară omogenă de ordinul întâi a cărei soluție generală este

$$W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} \quad (9)$$

În particular, pentru  $x = x_0$  rezultă  $C = W(x_0)$ , deci

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}.$$

**Definiția 7.3.2** Se numește sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă (2), orice set de  $n$  soluții particulare  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ale ecuației (2) cu proprietatea că există  $x_0 \in J$ , astfel încât  $W[y_1, \dots, y_n](x_0) \neq 0$ .

**Corolarul 7.3.1** Dacă  $y_1, y_2, \dots, y_n$  este un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2), atunci  $y_1, \dots, y_n$  sunt liniar independente pe intervalul  $J$ .

*Demonstrație.*

Fie  $x_0 \in J$ , astfel încât  $W(x_0) = W[y_1, \dots, y_n](x_0) \neq 0$ . Din Teorema Liouville rezultă că  $W(x) \neq 0, \forall x \in J$ , iar din Propoziția 7.3.1 rezultă că  $y_1, \dots, y_n$  sunt liniar independente pe  $J$ .

**Teorema 7.3.2** Fie  $y_1, y_2, \dots, y_n$  un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2). Atunci, oricare ar fi  $y$  soluție a ecuației (2), există  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$  astfel încât  $y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x), \forall x \in J$ .

*Demonstrație.*

Deoarece  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sunt soluții pentru (2) rezultă:

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \\ a_0(x)y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y_1' + a_n(x)y_1 = 0 \\ \hline a_0(x)y_n^{(n)} + a_1(x)y_n^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y_n' + a_n(x)y_n = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Sistemul (10) este liniar și omogen și admite soluții nebanale,  $\forall x \in J$  [Deoarece prin ipoteză  $a_0(x) \neq 0, \forall x \in J$ ]. Rezultă că determinantul coeficienților este 0, deci

$$\begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & \dots & y' & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_1' & y_1 \\ \hline y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \dots & y_n' & y_n \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in J. \quad (11)$$

Egalitatea (11) este echivalentă cu

$$W[y, y_1, \dots, y_n](x) = 0, \quad \forall x \in J. \quad (12)$$

Pe de altă parte, prin ipoteză există  $x_0 \in J$  astfel încât  $W[y_1, \dots, y_n](x_0) \neq 0$  și conform teoremei Liouville rezultă că  $W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0, \forall x \in J$ . Sunt îndeplinite așadar ipotezele Propoziției 7.3.2, de unde deducem că există  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$  astfel încât  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ .

**Observația 7.3.2** Orice sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2) este o bază în spațiul vectorial  $S$  al soluțiilor ecuației (2) și  $\dim_{\mathbb{R}} S = n$ . Într-adevăr, din Corolarul 7.3.1 deducem că  $y_1, \dots, y_n$  sunt liniar independente pe  $J$ , iar din Teorema 7.3.2 că  $y_1, \dots, y_n$  formează un sistem de generatori pentru  $S$ . Cum dimensiunea unui spațiu vectorial este egală cu numărul vectorilor din orice bază a sa, rezultă că  $\dim_{\mathbb{R}} S = n$ .

**Observația 7.3.3** Din Teorema 7.3.2 rezultă că dacă  $y_1, \dots, y_n$  este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă (2), atunci soluția generală\*) a ecuației (2) este  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \forall C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ .

**Propoziția 7.3.3** Fie  $y_p$  o soluție oarecare a ecuației neomogene (1), oarecare fixată. Atunci, orice soluție  $y$  a ecuației neomogene (1) este de forma

$$y = y_0 + y_p \quad (13)$$

unde  $y_0$  este o soluție a ecuației omogene (2).

*Demonstrație.*

Fie  $S$  spațiul vectorial al soluțiilor ecuației omogene (2) și fie  $\mathbf{S}$  mulțimea soluțiilor ecuației neomogene (1). Dacă  $y = y_0 + y_p$  unde  $y_0 \in S$  și  $y_p \in \mathbf{S}$ , atunci  $L(D)(y) = L(D)(y_0) + L(D)(y_p) = 0 + f(x) = f(x)$ . Rezultă că  $y \in \mathbf{S}$ . Reciproc, fie  $y \in \mathbf{S}$  și  $z = y - y_p$ . Atunci  $L(D)(z) = L(D)(y) - L(D)(y_p) = f(x) - f(x) = 0$ , deci  $z \in S$ . Prin urmare  $y = z + y_p$ , unde  $z \in S$ .

În cele ce urmează vom arăta că dacă se cunoaște soluția generală a ecuației omogene (2), atunci, folosind metoda variației constantelor a lui Lagrange, se poate afla soluția generală a ecuației neomogene (1). Pentru simplificarea scrierii, să presupunem că  $n = 2$ .

---

\*) Prin soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul  $n$ ,  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , se înțelege o familie de soluții ale acesteia, de forma  $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ , unde  $C_i$  sunt constante arbitrare.

Fie  $y_1, y_2$  un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2). Atunci, soluția generală a ecuației omogene este

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (14)$$

Căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) de forma

$$y = \varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2 \quad (15)$$

Derivând, obținem:  $y' = \varphi_1(x) y_1' + \varphi_2(x) y_2' + \varphi_1'(x) y_1 + \varphi_2'(x) y_2$ .

Impunem condiția

$$\varphi_1'(x) y_1 + \varphi_2'(x) y_2 = 0 \quad (16)$$

Ținând seama de (16), rezultă că

$$y' = \varphi_1(x) y_1' + \varphi_2(x) y_2' , \quad (17)$$

și mai departe că

$$y'' = \varphi_1(x) y_1'' + \varphi_2(x) y_2'' + \varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2' \quad (18)$$

În sfârșit, punând condiția ca funcția definită în (14) să verifice ecuația  $a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x)$  și ținând seama de (17) și (18) rezultă:

$$a_0(x) [\varphi_1(x) y_1'' + \varphi_2(x) y_2'' + \varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2'] + a_1(x) [\varphi_1(x) y_1' + \varphi_2(x) y_2'] + a_2(x) [\varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2] = f(x).$$

În continuare avem:

$$\varphi_1(x) [a_0(x) y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1] + \varphi_2(x) [a_0(x) y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2] + a_0(x) [\varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2'] = f(x).$$

Ținând seama că  $y_1$  și  $y_2$  sunt soluții pentru ecuația omogenă, rezultă că  $a_0(x) [\varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2'] = f(x)$ , deci că

$$\varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2' = \frac{f(x)}{a_0(x)} \quad (19)$$

În concluzie, dacă, căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) sub forma (15), atunci funcțiile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  satisfac condițiile (16) și (19), anume:

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) y_1 + \varphi_2'(x) y_2 = 0 \\ \varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2' = \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases} \quad (20)$$

Cum determinantul coeficienților sistemului liniar (20) este chiar wronskianul funcțiilor  $y_1, y_2$  și este diferit de zero prin ipoteză, rezultă că sistemul (20) are soluție unică. Fie  $\varphi_1'(x) = g_1(x)$  și  $\varphi_2'(x) = g_2(x)$  soluția unică a sistemului (20). Mai departe avem:

$$\varphi_1(x) = \int g_1(x) dx + C_1 \text{ și } \varphi_2(x) = \int g_2(x) dx + C_2 \quad (21)$$

Înlocuind (21) în (15) obținem soluția generală a ecuației neomogene:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 \int g_1(x) dx + y_2 \int g_2(x) dx = y_0 + y_p \quad (22)$$

unde  $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$  este soluția generală a ecuației omogene, iar

$y_p = y_1 \int g_1(x) dx + y_2 \int g_2(x) dx$  este o soluție particulară a ecuației neomogene.

**Observația 7.3.4** În cazul general, metoda variației constantelor constă în următoarele: fie  $y_1, y_2, \dots, y_n$  un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2). Atunci, soluția generală a ecuației (2) este:  $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ .

Căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) de forma

$$y = \varphi_1(x) y_1 + \dots + \varphi_n(x) y_n \quad (23)$$

unde  $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n$  verifică sistemul

$$\begin{cases} \varphi'_1(x) y_1 + \dots + \varphi'_n(x) y_n = 0 \\ \varphi'_1(x) y'_1 + \dots + \varphi'_n(x) y'_n = 0 \\ \hline \varphi'_1(x) y_1^{(n-1)} + \dots + \varphi'_n(x) y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases} \quad (24)$$

Rezolvând sistemul (24) (care are soluție unică) și integrând, obținem funcțiile  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  și deci soluția generală a ecuației neomogene (23).

În concluzie, dacă cunoaștem un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă, atunci folosind metoda variației constantelor a lui Lagrange putem să aflăm soluția generală a ecuației neomogene. În general, determinarea unui sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă este dificilă pentru ecuații cu coeficienți variabili. Acest lucru este posibil însă, în cazul ecuațiilor cu coeficienți constanți, de care ne vom ocupa în continuare.

Fie

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (25)$$

o ecuație diferențială liniară și omogenă de ordinul  $n$ , cu  $a_i \in \mathbb{R}$ , constante,  $\forall i = \overline{1, n}$ .

Căutăm soluții ale ecuației (25) de forma

$$y = e^{rx} \quad (26)$$

unde  $r$  este o constantă reală.

Punând condiția ca funcția definită în (26) să fie soluție pentru ecuația (25) rezultă:

$$e^{rx} (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) = 0.$$

Se obține astfel o ecuație algebrică de ordinul  $n$ , care se numește ecuația caracteristică:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (27)$$

Distingem următoarele cazuri:

**Cazul 1.** Ecuația caracteristică (27) are rădăcini reale și distincte două câte două.

Fie  $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ ,  $r_i \neq r_j$  dacă  $i \neq j$ , rădăcinile ecuației caracteristice (27).

Atunci:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}$ , vor fi soluții ale ecuației diferențiale (25). Wronskianul acestor soluții este

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \dots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \dots & r_n e^{r_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1 + \dots + r_n)x} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (r_i - r_j) \neq 0.$$

Rezultă că aceste soluții formează un sistem fundamental de soluții, deci soluția generală a ecuației (25) este  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$ .

**Exemplul 7.3.1** Să se afle soluția generală a ecuației  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ . Ecuația caracteristică este  $r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$  și are soluțiile  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 2$ . Soluția generală este  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$ .

**Cazul 2.** Ecuația caracteristică admite o rădăcină multiplă de ordinul  $m \leq n$ . Vom arăta în acest caz, că dacă de exemplu  $r_0$  este această rădăcină, atunci ecuația diferențială (25) admite soluțiile:  $e^{r_0 x}, x e^{r_0 x}, \dots, x^{m-1} \cdot e^{r_0 x}$ .

Pentru început vom demonstra următoarea leamnă.

**Lema 7.3.1** Pentru orice funcție  $g \in C^{(k)}(J)$  avem:

$(D - rI)^k [e^{r x} g(x)] = e^{r x} g^{(k)}(x)$ , unde  $D = \frac{d}{dx}$  este operatorul de derivare și  $I$  este operatorul identitate pe  $C^{(k)}(J)$ .

*Demonstrație.*

Demonstrația se face prin inducție matematică. Pentru  $k = 1$  avem:  $(D - rI)[e^{r x} g(x)] = r e^{r x} g(x) + e^{r x} g'(x) - r e^{r x} g(x) = e^{r x} g'(x)$ .

Presupunem afirmația adevărată pentru  $p < k$  și o demonstrăm pentru  $p + 1$ . Într-adevăr

$$\begin{aligned} (D - rI)^{p+1} [e^{r x} g(x)] &= (D - rI) \left[ (D - rI)^p (e^{r x} g(x)) \right] = (D - rI) (e^{r x} g^{(p)}(x)) = \\ &= r e^{r x} g^{(p)}(x) + e^{r x} g^{(p+1)}(x) - r e^{r x} g^{(p)}(x) = e^{r x} g^{(p+1)}(x) \end{aligned}$$



Fie acum  $r_0$  o rădăcină de ordinul de multiplicitate  $m$  pentru ecuația caracteristică (27). Dacă notăm cu  $F(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n$ , membrul stâng al ecuației (25), atunci  $F(r) = F_1(r)(r - r_0)^m$ , unde  $F_1$  este o funcție polinomială de gradul  $n - m$ . Acestei descompuneri în factori a polinomului caracteristic îi corespunde următoarea descompunere a operatorului  $L(D)$ :

$L(D) = L_1(D) \circ (D - r_0 I)^m$ . Mai precis, dacă

$$F_1(r) = b_0 r^{n-m} + b_1 r^{n-m-1} + \dots + b_{n-m}, \text{ atunci}$$

$$L_1(D) = b_0 D^{n-m} + b_1 D^{n-m-1} + \dots + b_{n-m} I.$$

Pentru orice  $k < m$ , din Lema 7.3.1 rezultă:

$$\begin{aligned} L(D)(x^k e^{r_0 x}) &= L_1(D) \left[ (D - r_0 I)^m (x^k e^{r_0 x}) \right] = \\ &= L_1(D) \left[ e^{r_0 x} (x^k)^{(m)} \right] = L_1(D)(0) = 0. \end{aligned}$$

Rezultă că  $x^k e^{r_0 x}$  este o soluție pentru ecuația diferențială (25), oricare ar fi  $k = 0, m-1$ .

**Observația 7.3.5** Funcțiile  $e^{rx}, x e^{rx}, \dots, x^p e^{rx}$ ,  $x \in J$  sunt liniar independente pe intervalul  $J$ .

Într-adevăr, să presupunem că avem relația

$$\lambda_0 e^{rx} + \lambda_1 x e^{rx} + \dots + \lambda_{p+1} x^p e^{rx} = 0, \quad \forall x \in J. \text{ Atunci rezultă}$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{p+1} x^p = 0, \quad \forall x \in J, \text{ deci } \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p+1} = 0.$$

**Exemplul 7.3.2** Să se afle soluția generală a ecuației  $y'' - 6y' + 9y = 0$ . Ecuația caracteristică este  $r^2 - 6r + 9 = 0$ , care admite rădăcina dublă  $r_1 = r_2 = 3$ .

Ecuația diferențială va admite soluțiile particulare  $y_1 = e^{3x}$  și  $y_2 = x e^{3x}$ , care sunt liniar independente.

Soluția generală va fi  $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ .

**Cazul 3.** Ecuația caracteristică admite rădăcina complexă simplă  $r = \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ .

Vom arăta în acest caz, că ecuația diferențială admite soluțiile particulare  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$  și  $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ .

**Definiția 7.3.3** Dacă  $u, v : J \rightarrow \mathbb{P}$  sunt derivabile pe intervalul  $J$  și  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$  este funcția complexă definită astfel:  $f(x) = u(x) + i v(x)$ ,  $\forall x \in J$ , atunci prin definiție,  $f'(x) = u'(x) + i v'(x)$ ,  $\forall x \in J$ .

(În mod analog se poate defini derivata de orice ordin a funcției  $f$ ).

**Lema 7.3.2** Dacă  $f = u + iv$  este soluție pentru ecuația diferențială omogenă (25), atunci  $u$  și  $v$  sunt de asemenea soluții pentru ecuația (25).

*Demonstrație.* Prezentăm demonstrația pentru cazul particular  $n = 2$ . Dacă  $f = u + iv$  este soluția pentru ecuația (25), atunci avem:

$$a_0[u(x) + iv(x)]'' + a_1[u(x) + iv(x)]' + a_2[u(x) + v(x)] = 0, \quad \forall x \in J.$$

Efectuând calculele rezultă că:

$$[a_0u''(x) + a_1u'(x) + a_2u(x)] + i[a_0v''(x) + a_1v'(x) + a_2v(x)] = 0, \quad \forall x \in J$$

și mai departe că:

$$a_0u''(x) + a_1u'(x) + a_2u(x) = 0$$

$$a_0v''(x) + a_1v'(x) + a_2v(x) = 0, \quad \forall x \in J,$$

deci  $u$  și  $v$  sunt soluții pentru ecuația (25).

Fie  $r = \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$  o rădăcină complexă a ecuației caracteristice (27).

Atunci  $y = e^{(\alpha+i\beta)x}$  este o soluție (complexă) a ecuației diferențiale (25).

Din formulele lui Euler (Vezi [10], 3.2.1) rezultă că:

$$y = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x, \text{ iar din Lema}$$

7.3.2 că  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$  și  $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$  sunt soluții (reale) ale ecuației (25). Pe de altă parte este evident că  $y_1$  și  $y_2$  sunt liniar independente.

**Exemplul 7.3.3** Să se afle soluția generală a ecuației:  $y'' - 2y' + 5y = 0$ . Ecuația caracteristică este  $r^2 - 2r + 5 = 0$  și are rădăcinile  $r_{1,2} = 1 \pm 2i$ . Rezultă că ecuația diferențială admite soluțiile particulare  $y_1 = e^x \cos 2x$  și  $y_2 = e^x \sin 2x$ .

Soluția generală este  $y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$ .

**Exemplul 7.3.4** Să se afle soluția generală a ecuației:

$$y^{VII} - y^{IV} - 2y^{IV} - 5y''' - 4y'' - 3y' - 2y = 0.$$

Ecuația caracteristică este

$$r^7 - r^5 - 2r^4 - 5r^3 - 4r^2 - 3r - 2 = 0.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice sunt:

$$r_1 = r_2 = -1, \quad r_3 = 2; \quad r_4 = r_5 = i, \quad r_6 = r_7 = -i.$$

Ecuația admite următoarele soluții particulare:  $y_1 = e^{-x}$ ,  $y_2 = xe^{-x}$ ,  $y_3 = e^{2x}$ ,  $y_4 = \cos x$ ,  $y_5 = x \cos x$ ,  $y_6 = \sin x$ ,  $y_7 = x \sin x$ . Aceste soluții sunt liniar independente. Soluția generală este  $y = \sum_{i=1}^7 C_i y_i$ ,  $C_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = \overline{1, 7}$ .

Așa cum am văzut în Observația 7.3.4, dacă cunoaștem soluția generală a ecuației omogene, cu metoda variației constantelor putem afla și soluția generală a ecuației neomogene.

**Exemplul 7.3.5** Să se afle soluția generală a ecuației  $y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

Ecuația omogenă asociată  $y'' + y = 0$  are ecuația caracteristică  $r^2 + 1 = 0$ . Rădăcinile ecuației caracteristice sunt  $r_{1,2} = \pm i$  ( $\alpha = 0, \beta = 1$ ). Soluția generală a ecuației omogene este:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (28)$$

Căutăm soluția generală a ecuației neomogene de forma:

$$y = \varphi_1(x) \cos x + \varphi_2(x) \sin x.$$

Funcțiile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  verifică sistemul

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) \cos x + \varphi_2'(x) \sin x = 0 \\ -\varphi_1'(x) \sin x + \varphi_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obținem

$$\varphi_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad \varphi_2'(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

În continuare avem:

$$\varphi_1(x) = \int -\frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = -\frac{1}{\cos x} + C_1$$

$$\varphi_2(x) = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C_2.$$

Înlocuind în (28) obținem soluția generală a ecuației neomogene:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 1 + \frac{1}{2} (\sin x) \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Metoda variației constantelor este laborioasă (presupune rezolvarea unui sistem de ecuații liniare și apoi calculul unor primitive). În anumite situații, când membrul drept al ecuației neomogene este de forme particulare, se procedează altfel pentru rezolvarea ecuației neomogene. În continuare descriem această metodă. Să presupunem că membrul drept al ecuației neomogene este de forma:

$$f(x) = e^{\lambda x} [P_1(x) \cos \mu x + P_2(x) \sin \mu x] \quad (29)$$

unde  $P_1$  și  $P_2$  sunt funcții polinomiale.

**Cazul 1.** Dacă  $\lambda + i\mu$  nu este rădăcină pentru ecuația caracteristică (27), se caută o soluție particulară a ecuației neomogene (1) de forma:

$$y_p = e^{\lambda x} [Q_1(x) \cos \mu x + Q_2(x) \sin \mu x] \quad (30)$$

unde  $\text{gr } Q_1 = \text{gr } Q_2 = \max(\text{gr } P_1, \text{gr } P_2)$ . Se pune condiția ca funcția definită în (30) să verifice ecuația neomogenă și se determină funcțiile polinomiale  $Q_1$  și  $Q_2$ .

Acest caz se mai numește și cazul fără rezonanță.

**Cazul 2** (cu rezonanță) Dacă  $\lambda + i\mu$  este rădăcină a ecuației caracteristice (27) și are ordinul de multiplicitate  $m$ , atunci se caută o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_p = x^m e^{\lambda x} [Q_1(x) \cos \mu x + Q_2(x) \sin \mu x] \quad (31)$$

și în continuare se procedează ca în Cazul 1.

**Exemplul 7.3.6** Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' - 3y' + 2y = 5e^{-x} \quad (32)$$

Ecuația omogenă este  $y'' - 3y' + 2y = 0$  și are ecuația caracteristică

$$r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0. \text{ Soluția generală a ecuației omogene este}$$

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Membrul drept este de forma (29) și anume  $\lambda = -1$ ,  $\mu = 0$ ,  $P_1(x) = 5$ ,  $P_2(x) = 0$ .

$\lambda + i\mu = -1$  nu este rădăcină pentru ecuația caracteristică. Atunci căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_p = a e^{-x} \quad (33)$$

Punând condiția ca (33) să verifice ecuația (32) obținem:

$$a e^{-x} + 3a e^{-x} + 2a e^{-x} = 5e^{-x}, \text{ de unde rezultă } a = \frac{5}{6} \text{ și } y_p = \frac{5}{6} e^{-x}.$$

Soluția generală a ecuației (32) este  $y = y_0 + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{6} e^{-x}$ .

**Exemplul 7.3.7**

$$y'' - 3y' + 2y = 8e^{2x} \quad (34)$$

În acest caz  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 0$ ,  $P_1 = 8$ ;  $P_2 = 0$ .

Observăm că avem rezonanță, deoarece  $\lambda + i\mu = 2$  este rădăcină simplă pentru ecuația caracteristică. Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_p = x \cdot a e^{2x}, \quad a \in \mathbb{P}. \quad (35)$$

Punând condiția ca (35) să verifice (34) obținem:

$$(4a + 4ax - 2a - 6ax + 2ax)e^{2x} = 8e^{2x}.$$

Rezultă  $a = 8$  și  $y_p = 8x e^{2x}$ . Soluția generală este:  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 8x e^{2x}$ .

### Exemplul 7.3.8

$$y'' - 3y' + 2y = 2\cos x \quad (36)$$

Avem:  $\lambda = 0$ ;  $\mu = 1$ ,  $P_1 = 2$ ,  $P_2 = 0$ .

$\lambda + i\mu = i$  nu este rădăcină pentru ecuația caracteristică. Căutăm soluția particulară  $y_p$  de forma

$$y_p = e^{0x}(a\cos x + b\sin x) = a\cos x + b\sin x \quad (37)$$

Punând condiția ca (37) să verifice (36) obținem:

$$(a - 3b)\cos x + (3a + b)\sin x = 2\cos x.$$

Rezultă

$$\begin{cases} a - 3b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \text{ și mai departe } a = \frac{1}{5}, b = -\frac{3}{5}, y_p = \frac{1}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x.$$

Soluția generală a ecuației (36) este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x.$$

### Exemplul 7.3.9

$$y'' + y = 3\sin x \quad (38)$$

Ecuația omogenă  $y'' + y = 0$  are ecuația caracteristică  $r^2 + 1 = 0$ . Soluția generală a ecuației omogene este  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . (Vezi exemplul 7.3.5).

$\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ ;  $\lambda + i\mu = i$  este rădăcină simplă pentru ecuația caracteristică (avem rezonanța). Alegem

$$y_p = x(a\cos x + b\sin x) \quad (39)$$

Punând condiția ca  $y_p$  să verifice ecuația (38) obținem:

$$-2a\sin x + 2b\cos x = 3\sin x \text{ și mai departe } a = -\frac{3}{2}, b = 0, y_p = -\frac{3}{2}x\cos x.$$

Soluția generală a ecuației (38) este  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{3}{2}x\cos x$ .

În încheierea acestui paragraf prezentăm ecuațiile de tip Euler, care sunt ecuații cu coeficienți variabili.

Vom arăta că dacă facem schimbarea de variabilă  $x = e^t$ , ecuațiile Euler devin ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

O ecuație Euler este de forma:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (40)$$

unde  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, n$  sunt constante.

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$x = e^t \quad (41)$$

și notăm cu  $z(t) = y(e^t)$ , atunci avem:

$$z'(t) = y'(e^t) \cdot e^t, \text{ deci } y'(e^t) = e^{-t} z'(t).$$

Derivând în continuare obținem:

$$z''(t) = y''(e^t) \cdot e^{2t} + y'(e^t) \cdot e^t = y''(e^t) \cdot e^{2t} + z'(t), \text{ deci}$$

$$y''(e^t) = e^{-2t} (z''(t) - z'(t))$$

$$z'''(t) = y'''(e^t) \cdot e^{3t} + y''(e^t) \cdot 2e^{2t} + z''(t) = y'''(e^t) \cdot e^{3t} + 2(z''(t) - z'(t)) + z''(t)$$

Așadar, avem

$$y'''(e^t) = e^{-3t} (z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t)) \text{ etc.}$$

În general

$$y^{(k)}(e^t) = e^{-kt} (z^{(k)}(t) + b_1 z^{(k-1)}(t) + \dots + b_k z'(t)). \quad (42)$$

Înlocuind (42) în (40) obținem o ecuație cu coeficienți constanți în necunoscuta  $z = z(t)$ .

### Exemplul 7.3.10

$$x^2 y'' - xy' + y = \ln x. \quad (43)$$

În urma schimbării de variabilă  $x = e^t$ , ecuația devine

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} (z'' - z') - e^t \cdot e^{-t} \cdot z' + z = t \text{ sau} \\ z'' - 2z' + z = t \quad (44)$$

Ecuația omogenă  $z'' - 2z' + z = 0$  are ecuația caracteristică  $r^2 - 2r + 1 = 0$ , care admite rădăcina dublă  $r_1 = r_2 = 1$ .

Soluția generală a ecuației omogene este:

$$z_0 = C_1 e^t + C_2 t e^t \quad (45)$$

Deoarece nu avem rezonanță, căutăm o soluție particulară a membrului drept de forma:

$$y_p = at + b \quad (46)$$

Punând condiția ca  $y_p$  să verifice ecuația neomogenă (44), rezultă  $a = 1$ ,  $b = 2$ , deci  $y_p = t + 2$ .

Soluția generală a ecuației neomogene (44) este  $z = C_1 e^t + C_2 t e^t + t + 2$ .

Înlocuind  $t = \ln x$ , obținem soluția generală a ecuației (43):

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + \ln x + 2.$$

## 7.4 SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE.

### TEOREMA DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

Prin sistem de  $n$  ecuații diferențiale de ordinul întâi sub formă normală, se înțelege un sistem de forma:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1)$$

unde  $f_1, \dots, f_n$  sunt funcții continue definite pe o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Definiția 7.4.1** Se numește soluție a sistemului (1) orice set de  $n$ -funcții  $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ ,  $x \in I$  ( $I \subset \mathbb{R}$  interval deschis),  $\varphi_i \in C^1(I)$ ,  $i = \overline{1, n}$  cu proprietatea

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1(x)}{dx} = f_1[x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \\ \dots \\ \frac{d\varphi_n(x)}{dx} = f_n[x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \end{cases}, \quad \forall x \in I.$$

(Se subînțelege că am presupus că  $(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in D$ ,  $\forall x \in I$ ).

În general, un sistem de ecuații diferențiale admite o infinitate de soluții. Pentru a selecta o anumită soluție se impun condiții inițiale.

**Definiția 7.4.2** Fie  $M_0(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$  un punct oarecare din  $D$  fixat. Se numește problema Cauchy pentru sistemul (1), problema determinării unei soluții a acestui sistem,  $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ ,  $x \in I$ , care verifică condiția inițială:

$$\varphi_1(x_0) = y_{10}, \dots, \varphi_n(x_0) = y_{n0} \quad (2)$$

Dacă adoptăm scrierea vectorială:  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ,  $y_0 = (y_{10}, \dots, y_{n0})$ , sistemul (4) se scrie

$$y' = f(x, y) \quad (1')$$

iar problema Cauchy constă în determinarea unei funcții vectoriale  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi \in C^1(I)$  cu proprietățile:

$$(x, \varphi(x)) \in D, \quad \forall x \in I, \quad \varphi'(x) = f[x, \varphi(x)], \quad \forall x \in I, \quad \varphi(x_0) = y_0. \quad (2')$$

**Definiția 7.4.3** O funcție  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  este lipschitziană pe  $D$ , în raport cu  $y_1, \dots, y_n$ , dacă există o constantă  $L > 0$  astfel încât

$|f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, z_1, \dots, z_n)| \leq L \sum_{j=1}^n |y_j - z_j|$ , oricare ar fi punctele  $(x, y_1, \dots, y_n)$  și  $(x, z_1, \dots, z_n)$  din  $D$ .

**Observația 7.4.1** Dacă  $D$  este o mulțime deschisă și convexă,  $f \in C^1(D)$  și există  $M > 0$  astfel încât  $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y_1, \dots, y_n) \right| \leq M$ ,  $\forall (x, y_1, \dots, y_n) \in D$  și  $\forall i = \overline{1, n}$ , atunci  $f$  este lipschitziană pe  $D$ .

Într-adevăr, din teorema creșterilor finite a lui Lagrange, rezultă că oricare ar fi  $P(x, y_1, \dots, y_n) \in D$  și oricare ar fi  $Q(x, z_1, \dots, z_n) \in D$  există un punct  $(x, \xi_1, \dots, \xi_n)$  pe segmentul de dreaptă deschis, de capete  $P$  și  $Q$  astfel încât

$$f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \xi_1, \dots, \xi_n)(y_j - z_j).$$

În continuare avem:

$$\begin{aligned} |f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, z_1, \dots, z_n)| &\leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \xi_1, \dots, \xi_n) \right| |y_j - z_j| \leq \\ &\leq M \sum_{j=1}^n |y_j - z_j|, \end{aligned}$$

deci  $f$  este lipschitziană pe  $D$ .

**Teorema 7.4.1** (Teorema de existență și unicitate pentru sisteme)

Fie  $M_0(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in \square^{n+1}$ ,  $a, b_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  și  $D = (x_0 - a, x_0 + a) \times \Delta$ ,

unde  $\Delta = \prod_{j=1}^n (y_{j0} - b_j, y_{j0} + b_j) = (y_{10} - b_1, y_{10} + b_1) \times \dots \times (y_{n0} - b_n, y_{n0} + b_n)$ .

Dacă  $f_i: \bar{D} \rightarrow \square$  este continuă și lipschitziană pe  $\bar{D}$ , oricare ar fi  $i = \overline{1, n}$ , atunci există o soluție unică a sistemului (1):  $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ ,

$x \in I \subset (x_0 - a, x_0 + a)$  cu proprietatea:  $\varphi_1(x_0) = y_{10}, \dots, \varphi_n(x_0) = y_{n0}$ .

(Cu alte cuvinte, în condiții precizate, problema Cauchy (1)+(2) are soluție unică).

*Demonstrație.* Deoarece  $f_i$  este continuă pe mulțimea compactă  $\bar{D}$ , rezultă că este mărginită pe  $\bar{D}$ . Fie  $M_i > 0$  marginea superioară a funcției  $f_i$  pe  $\bar{D}$  și fie  $M = \max\{M_1, \dots, M_n\}$ . Fie de asemenea  $L = \max\{L_1, \dots, L_n\}$ , unde  $L_i > 0$  este constanta Lipschitz a funcției  $f_i$  pe  $\bar{D}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Fie  $\alpha \in (0, 1)$  oarecare și fie

$h = \min\left(a, \frac{b_1}{M}, \dots, \frac{b_n}{M}, \frac{\alpha}{nL}\right)$ . Notăm cu  $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ . Evident,



$I \subset (x_0 - a, x_0 + a)$ . Procedând ca în demonstrația Lemei 7.1.1, se arată că rezolvarea problemei Cauchy (1)+(2) este echivalentă cu rezolvarea următorului sistem de ecuații integrale:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_{10} + \int_{x_0}^x f_1[t, y_1(t), \dots, y_n(t)] dt \\ \dots \\ y_n(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^x f_n[t, y_1(t), \dots, y_n(t)] dt \end{cases}, x \in I \quad (3)$$

Rezultă că dacă arătăm că sistemul (4) are soluție unică, atunci teorema este demonstrată.

Fie  $\mathbf{F} = \{G = (g_1, \dots, g_n): I \rightarrow \Delta; G \text{ continuă pe } I\}$  și fie

$d(G, H) = \max_{1 \leq i \leq n} \sup\{|g_i(x) - h_i(x)|; x \in I\}$ , oricare ar fi funcțiile  $G = (g_1, \dots, g_n)$  și

$H = (h_1, \dots, h_n)$  din  $\mathbf{F}$ . Se arată, ca și în demonstrația Teoremei 7.1.1, că  $(\mathbf{F}, d)$  este un spațiu metric complet. În continuare, pentru orice  $G \in \mathbf{F}$  și orice  $x \in I$ , notăm cu  $T_i(G)(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i[t, g_1(t), \dots, g_n(t)] dt$  și cu  $T = (T_1, \dots, T_n)$ . Pentru început vom arăta că  $T: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ .

Într-adevăr, pentru orice  $x \in I$ , avem:

$$\begin{aligned} |T_i(G)(x) - y_{i0}| &\leq \left| \int_{x_0}^x f_i[t, g_1(t), \dots, g_n(t)] dt \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dt \right| = M(x - x_0) \leq \\ &\leq Mh \leq M \cdot \frac{b_i}{M} = b_i. \end{aligned}$$

Rezultă că  $T(G)(x) = (T_1(G)(x), \dots, T_n(G)(x)) \in \Delta$ ,  $\forall x \in I$ . Cum  $T(G)$  este evident continuă pe  $I$ , rezultă că  $T(G) \in \mathbf{F}$ .

În continuare vom arăta că  $T$  este o contracție pe  $\mathbf{F}$ . Pentru aceasta, fie  $G, H \in \mathbf{F}$ ,  $x \in I$  și  $i = \overline{1, n}$ . Atunci

$$\begin{aligned} |T_i(G)(x) - T_i(H)(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f_i(t, g_1(t), \dots, g_n(t)) - f_i(t, h_1(t), \dots, h_n(t))| dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L_i \sum_{j=1}^n |g_j(t) - h_j(t)| dt \right| \leq nL d(G, H) \left| \int_{x_0}^x dt \right| \leq nL d(G, H) h \leq \\ &\leq nL d(G, H) \frac{\alpha}{nL} = \alpha d(G, H). \end{aligned}$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} d(T(G), T(H)) &= \max_{1 \leq i \leq n} \sup\{|T_i(G)(x) - T_i(H)(x)|; x \in I\} \leq \\ &\leq \alpha d(G, H). \end{aligned}$$

Cum  $\alpha \in (0,1)$ , deducem că  $T$  este o contracție pe  $F$ . Din Teorema de punct fix a lui Banach, rezultă că există  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in F$ , unică, cu proprietatea:  $T(\Phi) = \Phi$ , relație vectorială echivalentă cu:

$$y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i[t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] dt = \varphi_i(t), \quad \forall t \in I, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Așadar, am arătat că  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): I \rightarrow \Delta$  este soluția unică a sistemului (3) și cu aceasta teorema este demonstrată.

**Definiția 7.4.4** Prin ecuație diferențială de ordinul  $n$ , sub formă normală, înțelegem o ecuație diferențială de formă:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (4)$$

unde  $f$  este o funcție continuă definită pe o mulțime deschisă  $D \subset \square^{n+1}$ ,  $y = y(x)$  este funcția necunoscută iar  $y^{(k)}$  este derivata de ordinul  $k$  a lui  $y$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ .

Prin soluție a ecuației (4) se înțelege orice funcție  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$ ,  $\varphi \in C^{(n-1)}(I)$  cu proprietățile:

$$\begin{aligned} (x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) &\in D, \quad \forall x \in I \text{ și} \\ \varphi^{(n)}(x) &= f[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)], \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Fie  $M_0(x_0, y_0, y_{10}, \dots, y_{n-1,0}) \in D$  un punct oarecare fixat. Problema Cauchy pentru ecuația (4) și punctul  $M_0$  constă în determinarea unei soluții:  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$  a ecuației (4) care îndeplinește condițiile:

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_{10}, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0} \quad (5)$$

**Teorema 7.4.2** Fie

$$D = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b_0, y_0 + b_0) \times \prod_{j=1}^{n-1} (y_{j0} - b_j, y_{j0} + b_j) \text{ un paralelipiped cu}$$

centrul în  $M_0(x_0, y_0, y_{10}, \dots, y_{n-1,0}) \in D$ . Presupunem că  $f: \bar{D} \rightarrow \square$  este continuă și lipschitziană în raport cu toate argumentele, mai puțin  $x$ .

În aceste condiții, problema Cauchy (4)+(5) are soluție unică.

*Demonstrație.*

Dacă introducem notațiile:

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)} \quad (6)$$

atunci ecuația (4) se înlocuiește cu următorul sistem de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dots \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases} \quad (7)$$

Cum sistemul (7) verifică condițiile din Teorema 7.3.1, rezultă că există o soluție unică a sistemului (7):

$$y = \varphi(x), \quad y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_{n-1} = \varphi_{n-1}(x), \quad x \in I \quad (8)$$

care verifică condiția inițială

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi_1(x_0) = y_{10}, \dots, \varphi_{n-1}(x_0) = y_{n-1,0} \quad (9)$$

Dacă ținem seama de notațiile (6) și de faptul că (8) este soluție pentru sistemul (7) obținem:  $\varphi^{(n)}(x) = f[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)]$ ,  $\forall x \in I$ , deci  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$  este soluție pentru ecuația (4). Pe de altă parte din (6) și (9) rezultă că  $\varphi(x_0) = y_0$ ,  $\varphi'(x_0) = y_{10}, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0}$ . Așadar,  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in I$  este soluție unică pentru problema Cauchy (4)+(5).

**Exemplul 7.4.1** Să se rezolve problema Cauchy

$$y'' + y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

Soluția generală a ecuației este  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$ . Din condițiile inițiale  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$  rezultă  $C_1 = 1$  și  $C_2 = 2$ . Soluția problemei Cauchy este  $y = \cos x + 2 \sin x + x$ .

## 7.5 SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE

Un sistem de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi este de forma următoare:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \quad (1)$$

unde  $a_{ij}$  și  $b_i$  sunt funcții continue definite pe un interval  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ .

Sistemul omogen asociat sistemului (1) este:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n \end{cases} \quad (2)$$

Dacă introducem notațiile vectoriale:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sistemul (1) devine

$$\frac{dY}{dx} = AY + b \quad (1')$$

iar sistemul (2)

$$\frac{dY}{dx} = AY \quad (2')$$

**Observația 7.5.1** Dacă notăm cu  $f_i(x) = a_{i1}(x)y_1 + \dots + a_{in}(x)y_n + b_i(x)$ ,

$\forall x \in I, \forall i = \overline{1, n}$ , atunci  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = a_{ij}(x)$ . Fie  $x_0 \in (a, b) = I$  și fie  $J \subset I$  un interval

închis care conține punctul  $x_0$ . Deoarece funcțiile  $a_{ij}$  și  $b_i$  sunt continue pe  $I$ , rezultă că aceste funcții sunt mărginite pe  $J$ . Din Observația 7.3.1 rezultă că funcțiile  $f_i$  sunt lipschitziene în raport cu  $y_1, \dots, y_n$  pe domeniul  $J \times \square^n$ . Rezultă că pe o vecinătate suficient de mică a punctului  $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in J \times \square^n$ , Teorema 7.3.1 de existență și unicitate este valabilă. De fapt, se poate demonstra mai mult, că oricare ar fi  $a < x_0 < b$  și oricare ar fi  $y_0 = (y_{10}, \dots, y_{n0}) \in \square^n$ , există o soluție unică a sistemului liniar (1):  $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ ,  $x \in I$  care verifică condiția inițială  $\varphi_1(x_0) = y_{10}, \dots, \varphi_n(x_0) = y_{n0}$ .

În continuare vom studia sistemul omogen (2).

**Propoziția 7.5.1** Dacă  $Y_1$  și  $Y_2$  sunt soluții ale sistemului omogen (2), atunci  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \square$ , rezultă că  $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$  este de asemenea soluție pentru (2).

*Demonstrație.* Deoarece operația de derivare este liniară rezultă:

$$\frac{d}{dx}(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) = \alpha_1 \frac{dY_1}{dx} + \alpha_2 \frac{dY_2}{dx} = \alpha_1 AY_1 + \alpha_2 AY_2 = A(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2).$$

Dacă notăm cu  $S$  mulțimea soluțiilor sistemului omogen (2) din Propoziția 7.5.1, rezultă că  $S$  este un spațiu vectorial real.

**Definiția 7.5.1** Fie  $Y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \dots, Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$   $n$ -soluții particulare ale siste-

mului omogen (2). Se numește wronskianul acestor soluții, următorul determinant:

$$W(x) = W[Y_1, \dots, Y_n](x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}, \quad x \in I.$$

**Propoziția 7.5.2** Dacă  $Y_1, \dots, Y_n$  sunt  $n$ -soluții particulare ale sistemului (2), liniar dependente pe  $I$ , atunci  $W(x) = 0, \forall x \in I$ .

*Demonstrație.* Prin ipoteză, există  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , nu toate nule, astfel încât:  
 $\alpha_1 Y_1(x) + \dots + \alpha_n Y_n(x) = 0, \forall x \in I$ , relație echivalentă cu:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x) + \dots + \alpha_n y_{1n}(x) = 0 \\ \alpha_1 y_{n1}(x) + \dots + \alpha_n y_{nn}(x) = 0, \quad \forall x \in I \end{cases} \quad (3)$$

Deoarece (3) este un sistem (algebric) liniar și omogen, care admite soluție nebanală, rezultă că determinantul coeficienților este zero. Dar, determinantul coeficienților este chiar wronskianul soluțiilor  $Y_1, \dots, Y_n$ .

Așadar,  $W(Y_1, \dots, Y_n)(x) = 0, \forall x \in I$ .

**Teorema 7.5.1** (Liouville)

Fie  $Y_1, \dots, Y_n$ ,  $n$ -soluții particulare ale sistemului omogen (2) și fie  $x_0 \in I$  oarecare fixat. Atunci,  $\forall x \in I$  avem:

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x [a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)] dt} \quad (4)$$

*Demonstrație.*

Pentru simplificarea scrierii, considerăm cazul particular  $n = 2$ . Fie deci

$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}$  și  $Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$  soluții particulare pentru (2). Wronskianul acestor soluții

este:  $W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}, \quad x \in I$ .

Deoarece  $Y_1$  și  $Y_2$  sunt soluții pentru sistemul (2) avem:

$$\begin{cases} \frac{dy_{11}}{dx} = a_{11} y_{11} + a_{12} y_{21} \\ \frac{dy_{21}}{dx} = a_{21} y_{11} + a_{22} y_{21} \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \frac{dy_{12}}{dx} = a_{11} y_{12} + a_{12} y_{22} \\ \frac{dy_{22}}{dx} = a_{21} y_{12} + a_{22} y_{22} \end{cases} \quad (5)$$

Ținând seama de modul de derivare al unui determinant, de identitățile (5) și de proprietățile determinantilor, rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \begin{vmatrix} \frac{dy_{11}}{dx} & \frac{dy_{12}}{dx} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ \frac{dy_{21}}{dx} & \frac{dy_{22}}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21} & a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ a_{21}y_{11} + a_{22}y_{21} & a_{21}y_{12} + a_{22}y_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ a_{22}y_{21} & a_{22}y_{22} \end{vmatrix} = \\ &= (a_{11} + a_{22}) \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Așadar, avem

$$\frac{dW}{dx} = [a_{11}(x) + a_{22}(x)] W(x), \quad x \in I \quad (6)$$

Observăm că (6) este o ecuație diferențială liniară și omogenă de ordinul întâi. Soluția sa generală este:  $W(x) = C \cdot e^{\int_{x_0}^x [a_{11}(t) + a_{22}(t)] dt}$ ,  $x \in I$ , unde  $C \in \mathbb{P}$  este o constantă arbitrară. Deoarece  $W(x_0) = C$ , rezultă:

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x [a_{11}(t) + a_{22}(t)] dt}, \quad x \in I.$$

**Definiția 7.5.2** Se numește sistem fundamental de soluții ale sistemului omogen (2), orice set de  $n$  soluții particulare ale acestui sistem,  $Y_1, \dots, Y_n$ , cu proprietatea că există  $x_0 \in I$ , astfel încât  $W[Y_1, \dots, Y_n](x_0) \neq 0$ .

**Corolarul 7.5.1** Dacă  $Y_1, \dots, Y_n$  este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen (2), atunci  $W[Y_1, \dots, Y_n](x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I$ .

Afirmația rezultă din Teorema Liouville.

**Observația 7.5.2** Din Propoziția 7.5.2 și Corolarul 7.5.1, rezultă că dacă  $Y_1, \dots, Y_n$  este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen (2), atunci  $Y_1, \dots, Y_n$  sunt liniar independente pe intervalul  $I$ .

**Teorema 7.5.2** Dacă  $Y_1, \dots, Y_n$  este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen (2), atunci oricare ar fi  $Y$  soluție a acestui sistem, există  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{P}$  astfel încât  $Y = C_1 Y_1 + \dots + C_n Y_n$ .

*Demonstrație.*

$$\text{Fie } Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \dots, Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ și } x_0 \in I \text{ oarecare fixat.}$$

Considerăm următorul sistem

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x_0) + \dots + \alpha_n y_{1n}(x_0) = y_1(x_0) \\ \alpha_1 y_{n1}(x_0) + \dots + \alpha_n y_{nn}(x_0) = y_n(x_0) \end{cases} \quad (7)$$

Deoarece determinantul coeficienților sistemului (7) este chiar wronskianul soluțiilor  $Y_1, \dots, Y_n$  și acesta este diferit de zero prin ipoteză, rezultă că sistemul (7) admite soluție unică. Fie  $C_1, C_2, \dots, C_n$  soluția unică a sistemului (7) și fie  $Z = C_1 Y_1 + \dots + C_n Y_n$ . Din Propoziția 7.5.1 rezultă că  $Z$  este soluție pentru sistemul omogen (2). Pe de altă parte, observăm că  $Z(x_0) = Y(x_0)$ . Din Teorema de existență și unicitate rezultă că  $Z = Y$ , deci  $Y = C_1 Y_1 + \dots + C_n Y_n$ .

**Observația 7.5.3** Din Teorema 7.5.2 rezultă că dacă cunoaștem  $n$ -soluții particulare ale sistemului omogen (2),  $Y_1, \dots, Y_n$  și acestea formează un sistem fundamental de soluții, atunci soluția generală a sistemului omogen este:

$$Y = C_1 Y_1 + \dots + C_n Y_n \quad (8)$$

unde  $C_1, \dots, C_n$  sunt constante arbitrare.

În continuare, prezentăm metoda variației constantelor a lui Lagrange pentru rezolvarea sistemelor neomogene. Pentru simplificarea scrierii considerăm cazul particular  $n = 2$ . Fie deci următorul sistem neomogen:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + b_1 \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + b_2 \end{cases} \quad (9)$$

Fie de asemenea  $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}$  și  $Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$  un sistem fundamental de soluții

pentru sistemul omogen asociat. Atunci avem:

$$\begin{cases} \frac{dy_{11}}{dx} = a_{11} y_{11} + a_{12} y_{21} \\ \frac{dy_{21}}{dx} = a_{21} y_{11} + a_{22} y_{21} \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \frac{dy_{12}}{dx} = a_{11} y_{12} + a_{12} y_{22} \\ \frac{dy_{22}}{dx} = a_{21} y_{12} + a_{22} y_{22} \end{cases} \quad (10)$$

Din Observația 7.5.3 deducem că soluția generală a sistemului omogen este

$$\begin{cases} y_{10} = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} \\ y_{20} = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (11)$$

Căutăm soluția sistemului neomogen (9) de forma

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x) y_{11} + \varphi_2(x) y_{12} \\ y_2 = \varphi_1(x) y_{21} + \varphi_2(x) y_{22} \end{cases} \quad (12)$$

Punând condiția ca (12) să verifice sistemul (9) obținem:

$$\begin{cases} \varphi'_1 y_{11} + \varphi'_2 y_{12} + \varphi_1 y'_{11} + \varphi_2 y'_{12} = a_{11}(\varphi_1 y_{11} + \varphi_2 y_{12}) + a_{12}(\varphi_1 y_{21} + \varphi_2 y_{22}) + b_1 \\ \varphi'_1 y_{21} + \varphi'_2 y_{22} + \varphi_1 y'_{21} + \varphi_2 y'_{22} = a_{12}(\varphi_1 y_{11} + \varphi_2 y_{12}) + a_{22}(\varphi_1 y_{21} + \varphi_2 y_{22}) + b_2 \end{cases}$$

Ținând seama de identitățile (10) rezultă

$$\begin{cases} \varphi'_1(x) y_{11} + \varphi'_2(x) y_{12} = b_1(x) \\ \varphi'_1(x) y_{21} + \varphi'_2(x) y_{22} = b_2(x), \quad x \in I. \end{cases} \quad (13)$$

Deoarece determinantul coeficienților este chiar wronkianul soluției  $Y_1, Y_2$  și acesta este diferit de zero pe  $I$ , rezultă că sistemul (13) are soluție unică.

Fie  $\varphi'_1(x) = g_1(x)$  și  $\varphi'_2(x) = g_2(x)$ ,  $x \in I$ , soluția unică a sistemului (13).

Integrând, obținem:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \int g_1(x) dx + C_1 \\ \varphi_2(x) = \int g_2(x) dx + C_2 \end{cases} \quad (14)$$

În sfârșit, înlocuind (14) în (12) obținem soluția generală a sistemului neomogen (9), anume:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + y_{11} \int g_1(x) dx + y_{12} \int g_2(x) dx \\ y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + y_{21} \int g_1(x) dx + y_{22} \int g_2(x) dx \end{cases} \quad (15)$$

Dacă notăm cu:

$$\begin{cases} y_{1p} = y_{11} \int g_1(x) dx + y_{12} \int g_2(x) dx \\ y_{2p} = y_{21} \int g_1(x) dx + y_{22} \int g_2(x) dx \end{cases} \quad \text{și cu } Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}, Y_p = \begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{pmatrix} \text{ atunci soluția}$$

generală a sistemului neomogen (9) este de forma

$$Y = Y_0 + Y_p \quad (15')$$

unde  $Y_0$  este soluția generală a sistemului omogen, iar  $Y_p$  este o soluție particulară a sistemului neomogen.

**Observația 7.5.4** În principiu, rezolvarea sistemului neomogen este întotdeauna posibilă dacă se cunoaște un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen. Într-adevăr, fie  $Y_1, \dots, Y_n$  un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen. Atunci

$$Y_0 = C_1 Y_1 + \dots + C_n Y_n \quad (16)$$

este soluția generală a sistemului omogen.

Căutăm soluția generală a sistemului neomogen de forma:

$$Y = \varphi_1(x) Y_1 + \dots + \varphi_n(x) Y_n \quad (17)$$

Funcțiile  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  se determină astfel:

Se consideră sistemul:



$$\begin{cases} \varphi_1'(x)y_{11} + \dots + \varphi_n'(x)y_{1n} = b_1(x) \\ \varphi_1'(x)y_{n1} + \dots + \varphi_n'(x)y_{nn} = b_n(x) \end{cases} \quad (18)$$

Sistemul (18) are soluție unică. Fie  $\varphi_1'(x) = g_1(x), \dots, \varphi_n'(x) = g_n(x)$  soluția acestui sistem. Integrând, găsim:

$$\varphi_1(x) = \int g_1(x) dx + C_1, \dots, \varphi_n(x) = \int g_n(x) dx + C_n \quad (19)$$

Înlocuind (19) în (17) se obține soluția generală a sistemului neomogen.

Din păcate, pentru sisteme cu coeficienți variabili este dificil de aflat un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen. Acest lucru este posibil în cazul sistemelor cu coeficienți constanți. În continuare vom studia astfel de sisteme. Fie sistemul:

$$\frac{dY}{dx} = AY \quad (20)$$

unde  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  este o matrice constantă ( $a_{ij}$  sunt constante reale).

Reamintim că, prin definiție, derivata unei matrice ale cărei elemente sunt funcții derivabile, este matricea formată cu derivatele acestor elemente. Așadar,

$$\left( \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{pmatrix} \right)' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f'_{11}(x) & \dots & f'_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{n1}(x) & \dots & f'_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I, \text{ dacă } f_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ sunt derivabile, } \forall i, j = \overline{1, n}.$$

În particular  $(Ax)' = A \cdot$ .

Prin inducție matematică se demonstrează imediat că

$$\left[ (Ax)^k \right]' = k \cdot A (Ax)^{k-1}, \quad k \geq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Cum  $e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  și convergența este uniformă (Vezi [10],

3.6.1), rezultă că  $(e^{Ax})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot A \cdot (Ax)^{k-1}}{k!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Ax)^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{Ax}$ . Așadar, avem

$$(e^{Ax})' = A e^{Ax}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

**Teorema 7.5.2** Soluția generală a sistemului (20) este:

$$Y = e^{Ax} C \quad (22)$$

unde  $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$  este un vector constant oarecare ( $C_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ).

*Demonstrație.*

Din (21) rezultă imediat că  $\frac{dY}{dx} = Ae^{Ax}C$ . Înlocuind în (20) obținem identitatea  $Ae^{Ax}C = Ae^{Ax} \cdot C$ , deci (22) este soluție pentru (20).

**Exemplul 7.5.1** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1 + y_2 + 2x + 3 \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3y_2 + 4x - 1 \end{cases} \quad (23)$$

Sistemul omogen asociat este:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3y_2 \end{cases} \quad (24)$$

Conform Teoremei 7.5.2, soluția generală a sistemului (24) este  $Y = e^{Ax}C$ , unde  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$  și  $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ .

Matricea  $e^{Ax}$  se calculează ușor dacă matricea  $A$  se poate aduce la forma diagonală. În cazul nostru acest lucru este posibil. Într-adevăr, valorile proprii ale matricei  $A$  sunt  $\lambda_1 = 2$ ;  $\lambda_2 = -1$ .

Cum  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , există o bază formată din vectori proprii. O astfel de bază este  $v_1 = (1, 4)$ ,  $v_2 = (1, 1)$ .

Matricea de trecere de la baza canonică la această nouă bază este:

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ , iar  $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ . În raport cu noua bază, matricea  $A$  are forma

diagonală  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Din proprietățile funcției  $A \rightarrow e^A$  (Vezi (10), 3.6.2)

rezultă că

$$\begin{aligned} e^{Dx} &= \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \text{ și } e^{Ax} = T \cdot e^{Dx} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} \\ -\frac{4}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-x} & \frac{4}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluția generală a sistemului omogen (24) este:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = e^{4x} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_1}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}C_1e^{-x} + \frac{1}{3}C_2e^{2x} - \frac{1}{3}C_2e^{-x} \\ -\frac{4}{3}C_1e^{2x} + \frac{4}{3}C_1e^{-x} + \frac{4}{3}C_2e^{2x} - \frac{1}{3}C_2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Dacă introducem notațiile  $K_1 = \frac{C_2 - C_1}{3}$ ,  $K_2 = \frac{4C_1 - C_2}{3}$ , rezultă

$$\begin{cases} y_{10} = K_1e^{2x} + K_2e^{-x} \\ y_{20} = 4K_1e^{2x} + K_2e^{-x} \end{cases} \quad (25)$$

((25) reprezintă soluția generală a sistemului omogen (24)).

Pentru a găsi soluția sistemului neomogen, folosim metoda variației constantelor a lui Lagrange.

Căutăm soluția sistemului neomogen de forma:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x)e^{2x} + \varphi_2(x)e^{-x} \\ y_2 = 4\varphi_1(x)e^{2x} + \varphi_2(x)e^{-x} \end{cases} \quad (26)$$

Funcțiile  $\varphi'_1$  și  $\varphi'_2$  verifică sistemul:

$$\begin{cases} \varphi'_1(x)e^{2x} + \varphi'_2(x)e^{-x} = 2x + 3 \\ 4\varphi'_1(x)e^{2x} + \varphi'_2(x)e^{-x} = 4x - 1. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obținem:  $\varphi'_1(x) = \frac{2x-4}{3}e^{-2x}$ ,  $\varphi'_2(x) = \frac{4x+13}{3}e^x$  și

mai departe:

$$\varphi_1(x) = \frac{-2x+3}{6}e^{-2x} + C_1, \quad \varphi_2(x) = \frac{4x+9}{3}e^x + C_2 \quad (27)$$

Înlocuind (27) în (26), rezultă soluția generală a sistemului (23):

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + x + \frac{7}{2} \\ y_2 = 4C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + 5. \end{cases}$$

**Observația 7.5.5** La același rezultat se ajunge și dacă se folosește metoda eliminării, care constă în următoarele:

Se derivează una din ecuațiile sistemului (23), de exemplu prima și se elimină  $y_2$  și  $y'_2$  din ecuațiile sistemului și din ecuația derivată, obținându-se în final o ecuație diferențială liniară de ordinul doi, cu coeficienți constanți în necunoscuta  $y_1$ . Să reluăm, folosind metoda eliminării, rezolvarea sistemului (23):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1 + y_2 + 2x + 3 \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3y_2 + 4x - 1. \end{cases}$$

Derivând prima ecuație obținem:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -2 \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + 2 \quad (28)$$

Din prima ecuație a sistemului deducem că

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} + 2y_1 - 2x - 3 \quad (29)$$

Ținând seama de a doua ecuație a sistemului rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} &= -4y_1 + 3 \left( \frac{dy_1}{dx} + 2y_1 - 2x - 3 \right) + 4x - 1 \text{ și mai departe} \\ \frac{dy_2}{dx} &= 2y_1 + 3 \frac{dy_1}{dx} - 2x - 10. \end{aligned} \quad (30)$$

Înlocuind (30) în (28), obținem următoarea ecuație de ordinul doi:

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = -2x - 8 \quad (31)$$

Ecuația omogenă asociată este  $y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$ , iar ecuația sa caracteristică este  $r^2 - r - 2 = 0$ . Rădăcinile ecuației caracteristice sunt  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = -1$ , deci soluția generală a ecuației omogene este  $y_{10} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$ .

Căutăm o soluție a ecuației neomogene (31) de forma membrului drept (pentru că nu avem rezonanță)

$$y_{1p} = ax + b \quad (32)$$

Punând condiția ca (32) să verifice ecuația (31), obținem  $a = 1$ ;  $b = \frac{7}{2}$ .

Așadar, soluția generală a ecuației (31) este

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x + \frac{7}{2} \quad (33)$$

Înlocuind (33) în (29) rezultă că:  $y_2 = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 5$ .

Așadar, soluția sistemului (23) este:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x + \frac{7}{2} \\ y_2 = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 5, \end{cases}$$

aceeași soluție ca și cea obținută cu metoda matricială.

**Observația 7.5.6** Metoda matricială pentru rezolvarea sistemelor liniare omogene cu coeficienți constanți se aplică și în cazul când matricea  $A$  nu se poate diagonaliza, folosindu-se în acest caz pentru calculul matricei  $e^{Ax}$  forma canonică Jordan a lui  $A$ . Pentru detalii vezi [13].

## 7.6. SISTEME AUTONOME. ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

Prin sistem de ecuații diferențiale autonome, se înțelege un sistem de forma:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1)$$

unde  $f_i$  sunt funcții continue pe o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Se observă că în cazul sistemelor autonome, variabila independentă  $x$  nu apare printre argumentele funcțiilor  $f_i$ .

**Definiția 7.6.1** O funcție  $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$  se numește integrală primă pentru sistemul (1) dacă:

- a)  $\psi \in C^1(D)$ ;
- b)  $\psi$  nu este o funcție constantă pe  $D$ ;
- c) Pentru orice soluție  $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ ,  $x \in I$  a sistemului (1), există o constantă  $c \in \mathbb{R}$ , care depinde de această soluție, astfel încât  $\psi[\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] = c$ ,  $\forall t \in I$ .

**Exemplul 7.6.1** Fie sistemul autonom

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = -y_1, \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

Folosind metoda eliminării se obține imediat soluția generală a sistemului (2), anume:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases} \quad (3)$$

Observăm că funcția  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $\psi(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ ,

$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  este o integrală primă pentru sistemul (2). Într-adevăr,

$$\psi[C_1 \cos x + C_2 \sin x, -C_1 \sin x + C_2 \cos x] = C_1^2 + C_2^2 = \text{constant}.$$

**Teorema 7.6.1** Dacă  $f_i$  sunt continue și lipschitziene pe  $D$ , atunci o funcție  $\psi \in C^1(D)$  este integrală primă pentru sistemul (1) dacă și numai dacă:

$$f_1(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y) + \dots + f_n(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_n}(y) = 0, \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in D. \quad (4)$$

*Demonstrație*

**Necesitatea.** Fie  $x_0 \in \square$  și  $y_0 = (y_{10}, \dots, y_{n0}) \in D$  oarecare fixat.

Din Teorema de existență și unicitate pentru sisteme, rezultă că există o soluție unică a sistemului (1),  $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ ,  $x \in I$ , cu proprietatea:

$$\varphi_1(x_0) = y_{10}, \dots, \varphi_n(x_0) = y_{n0}.$$

Dacă  $\psi : D \rightarrow \square$  este integrală primă pentru (1), atunci

$$\psi[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = C, \quad \forall x \in I. \quad (5)$$

Derivând (5) rezultă:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot \frac{d\varphi_n(x)}{dx} = 0, \quad \forall x \in I.$$

Ținând seama că  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  verifică sistemul (1), mai departe avem:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial y_1}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot f_1[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] + \dots \\ & + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot f_n[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = 0, \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

În particular, pentru  $x = x_0$  rezultă  $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y_0) f_1(y_0) + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}(y_0) f_n(y_0) = 0$ . Cum  $y_0 \in D$  a fost arbitrar, rezultă că  $\psi$  verifică (4) pe  $D$ .

**Suficiența.** Fie  $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ ,  $x \in I$  o soluție oarecare a sistemului (1). Atunci  $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in D$ ,  $\forall x \in I$  și

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = f_1[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)], \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = f_n[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)], \quad \forall x \in I.$$

Dacă  $\psi \in C^1(D)$  verifică (4) pentru  $\forall y \in D$ , atunci avem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot \frac{d\varphi_n}{dx} = 0, \quad \forall x \in I,$$

relație echivalentă cu  $\frac{d}{dx} \psi[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = 0$ ,  $\forall x \in I$ ,

de unde rezultă că  $\psi[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = c$ ,  $\forall x \in I$ .

Așadar,  $\psi$  este integrală primă pentru sistemul (1).

**Teorema 7.6.2** Presupunem că  $f_i : D \subset \square^n \rightarrow \square$  sunt continue, lipschitziene

și  $\sum_{i=1}^n f_i^2(y) \neq 0$ ,  $\forall y \in D$ .

Atunci, sistemul (1) admite cel mult  $(n-1)$  integrale prime independente.

*Demonstrație.* Presupunem  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  sunt integrale prime pentru sistemul (1). Din Teorema 7.6.1 rezultă:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(y) f_1(y) + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n}(y) f_n(y) = 0 \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}(y) f_1(y) + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n}(y) f_n(y) = 0 \end{cases}, \quad \forall y \in D. \quad (6)$$

Am obținut un sistem (algebric) liniar și omogen în necunoscutele  $f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y)$ . Deoarece sistemul admite soluții nebanale, rezultă că determinantul coeficienților este zero. Așadar avem:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n}(y) \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n}(y) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall y \in D.$$

Din Teorema 4.11.2 din [10] rezultă că  $\psi_1, \dots, \psi_n$  sunt dependente funcțional pe  $D$ .

**Observația 7.6.1** În condițiile Teoremei 7.6.2 se poate arăta că sistemul (1) admite  $(n - 1)$  integrale prime independente funcțional pe  $D$ . Ținând seama și de Teorema 7.6.2, rezultă că sistemul (1) admite  $(n - 1)$  integrale prime independente și  $(n - 1)$  este numărul maxim de integrale prime independente ale sistemului (1).

În continuarea acestui paragraf vom presupune că funcțiile  $f_i$  satisfac condițiile din Teorema 7.6.2.

Sistemul (1) se poate pune sub forma simetrică echivalentă:

$$\frac{y'_1}{f_1(y_1, \dots, y_n)} = \frac{y'_2}{f_2(y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{y'_n}{f_n(y_1, \dots, y_n)} = 1. \quad (7)$$

Prin combinație integrabilă a sistemului (6), se înțelege o ecuație diferențială, consecință a sistemului (7), ușor de integrat. Metoda combinațiilor integrabile este folosită pentru aflarea integralelor prime ale sistemului.

**Exemplul 7.6.2** Să se afle două integrale prime independente ale sistemului:

$$\frac{y'_1}{y_2 - y_3} = \frac{y'_2}{y_3 - y_1} = \frac{y'_3}{y_1 - y_2} \quad (8)$$

Din proprietățile unui șir de rapoarte egale deducem:  $\frac{y'_1 + y'_2}{y_2 - y_1} = \frac{y'_3}{y_1 - y_2}$ .

După simplificare rezultă:  $\frac{d}{dx}(y_1 + y_2 + y_3) = 0$ , deci  $y_1 + y_2 + y_3 = C_1$ .

Funcția  $\psi_1(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3$  este integrală primă pentru (8). Pentru a obține o altă integrală primă facem următoarea combinație integrală:

Amplificăm succesiv primul raport cu  $y_1$ , al doilea cu  $y_2$ , al treilea cu  $y_3$  și folosind proprietățile rapoartelor egale obținem:  $\frac{y_1 y'_1 + y_2 y'_2}{y_2 y_3 - y_1 y_3} = \frac{y_3 y'_3}{y_1 y_3 - y_2 y_3}$ .

După ce simplificăm obținem  $\frac{d}{dx}(y_1 y'_1 + y_2 y'_2 + y_3 y'_3) = 0$ , deci  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2$ .

Funcția  $\psi_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$  este integrală primă pentru sistemul (8).

Prin ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară se înțelege o ecuație de forma:

$$P_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + P_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (9)$$

unde  $P_i$  sunt funcții continue și lipschitziene pe o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$  și  $\sum_{i=1}^n P_i^2(x) \neq 0$ ,  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ . Funcția  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  este funcția necunoscută.

**Definiția 7.6.2** Se numește soluție a ecuației (9) orice funcție  $\varphi$  definită pe o submulțime deschisă  $D_1 \subset D$ ,  $\varphi \in C^1(D_1)$  cu proprietatea:

$$P_1(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + P_n(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) = 0, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in D_1.$$

Ecuației cu derivate parțiale (9) i se asociază sistemul simetric următor:

$$\frac{x'_1}{P_1(x)} = \frac{x'_2}{P_2(x)} = \dots = \frac{x'_n}{P_n(x)} = 1. \quad (10)$$

**Observația 7.6.2** Din Teorema 7.6.2 rezultă că orice integrală primă a sistemului (10) este soluție pentru ecuația cu derivate parțiale (9). Mai general, are loc următoarea teoremă:

**Teorema 7.6.3** Fie  $\psi_1, \dots, \psi_k$  integrale prime pentru sistemul (10) și fie  $\Phi$  o funcție de clasă  $C^1$  definită pe mulțimea deschisă  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ . Atunci funcția  $u(x) = \Phi[\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)]$ ,  $\forall x \in D_1 \subset D$ , este soluție pentru ecuația cu derivate parțiale (9).  
(Se subînțelege că se presupune că  $(\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)) \in \Omega$ ,  $\forall x \in D_1$ ).

*Demonstrație.* Pentru orice  $x \in D_1$  avem:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1}(y) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1}(y) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}(x) \end{array} \right. , \quad y = (\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)) \in \Omega \quad (11)$$

Ținând seama de (11) și de Observația 7.6.2 deducem:

$$\sum_{i=1}^n P_i(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1}(y) \cdot \left[ P_1(x) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + \dots + P_n(x) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) \right] + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \cdot \left[ P_1(x) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1}(x) + \dots + P_n(x) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}(x) \right] = 0, \quad \forall x \in D_1.$$

Așadar,  $u = \Phi[\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)]$ ,  $x \in D_1$  este soluție a ecuației (9),  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Următoarea teoremă ne arată că orice soluție a ecuației (9) este de această formă.

**Teorema 7.6.4** Fie  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ ,  $(n-1)$  integrale prime independente ale sistemului (10) și fie  $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D_1 \subset D$  o soluție oarecare a ecuației (9). Atunci există o funcție  $\Phi$  de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$  astfel încât  $(\psi_1(x), \dots, \psi_{n-1}(x)) \in \Omega$ ,  $\forall x \in D_1$  și  $\varphi(x) = \Phi[\psi_1(x), \dots, \psi_{n-1}(x)]$ ,  $\forall x \in D_1$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  sunt soluții pentru (9), rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) + \dots + P_n(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) = 0 \\ P_1(x) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + \dots + P_n(x) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) = 0 \\ \dots \\ P_1(x) \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) + \dots + P_n(x) \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) = 0 \end{array} \right. , \quad \forall x \in D_1 \quad (12)$$

Deoarece  $\sum_{i=1}^n P_i^2(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in D_1$ , rezultă că sistemul liniar și omogen (12)

admite soluții nebanale pentru orice  $x \in D_1$ , deci determinantul coeficienților este zero.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) \\ \hline \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in D_1.$$

Cum prin ipoteză funcțiile  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  sunt independente funcțional, rezultă că:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) \\ \hline \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = n-1, \quad \forall x \in D_1.$$

Din Teorema 4.11.2 din [10] rezultă că  $\varphi$  depinde funcțional de  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  pe  $D_1$ , deci că există  $\Phi \in C^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$  astfel încât  $\varphi(x) = \Phi[\psi_1(x), \dots, \psi_{n-1}(x)]$ ,  $\forall x \in D_1$ .

**Exemplul 7.6.3** Să se afle soluția generală a ecuației:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Sistemul simetric asociat este:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}}, \quad xyz \neq 0.$$

Din  $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$  deducem  $\frac{y}{x} = C_1$ , deci  $\psi_1(x, y, z) = \frac{y}{x}$  este o integrală primă.

Pentru a obține o a doua integrală primă procedăm astfel: amplificăm primul raport cu  $x$ , al doilea raport cu  $y$  și folosim proprietățile rapoartelor egale. Rezultă

$$\frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{zz'}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{și mai departe} \quad \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = zz',$$

egalitate echivalentă cu  $\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)' = \left(\frac{z^2}{2}\right)'$ . Integrând rezultă  $\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{z^2}{2} = C_2$ ,

deci  $\psi_2(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{z^2}{2}$ , este integrală primă.

Soluția generală a ecuației va fi:  $u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{x}, \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{z^2}{2}\right)$ , unde  $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$  este o funcție arbitrară, iar  $xyz \neq 0$ .

**Definiția 7.6.3** Fie  $a \in P$  și  $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$  o mulțime deschisă cu proprietatea  $(x_1, \dots, x_{n-1}, a) \in D$ ,  $\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A$ . Fie de asemenea  $g : A \rightarrow P$  o funcție de clasă  $C^1$ . Problema Cauchy pentru ecuația (9) și funcția  $g$  constă în determinarea unei soluții  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  ale ecuației (9) care satisface următoarea condiție pe mulțimea  $A$ :

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, a) = g(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (13)$$

În cazul  $n = 2$  problema Cauchy are o interpretare geometrică simplă: să se găsească suprafața  $z = z(x, y)$  [soluție a ecuației  $P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ] care trece prin curba  $y = a$ ,  $z = g(x)$ .

**Teorema 7.6.5** Dacă există  $(n-1)$  integrale prime independente ale sistemului simetric asociat (10), atunci problema Cauchy (9) și (13) are o soluție unică  $u : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_1 \subset D$ .

*Demonstrație.*

Fie  $a \in P$ ,  $g \in C^1(A)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$  deschisă cu proprietatea că  $(x_1, \dots, x_{n-1}, a) \in D$ ,  $\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A$ .

Fie  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ ,  $(n-1)$  integrale prime independente funcțional pe  $D$ .

Rezultă că  $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_{n-1})}(x_1, \dots, x_{n-1}, a) \neq 0$ ,  $\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A$ .

Fie  $F : A \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  definită astfel:

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, a), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, a)), \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A.$$

Din Teorema de inversiune locală (Teorema 4.8.2 din [10]) rezultă că  $\forall M(x_1, \dots, x_{n-1}) \in A$ , există o vecinătate deschisă  $A_1$  a punctului  $M$ ,  $A_1 \subset A$  și o vecinătate deschisă  $B_1$  a punctului  $F(M)$ , astfel încât  $F : A_1 \rightarrow B_1$  este difeomorfism.

Fie  $F^{-1} = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) : B_1 \rightarrow A_1$ , inversa funcției  $F : A_1 \rightarrow B_1$ .

Definim

$$u(x) = g[\omega_1(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)), \dots, \omega_{n-1}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x))],$$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in D \quad (14)$$

cu proprietatea că  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in A_1$ .

Din Teorema 7.6.3 rezultă că funcția definită în (14) este soluție pentru (9).

Pe de altă parte, observăm că  $u(x_1, \dots, x_{n-1}, a) = g\left[\left(F^{-1} \circ F\right)(x_1, \dots, x_{n-1})\right] = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ , oricare ar fi  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in A_1$ , deci funcția definită în (14) este soluția problemei Cauchy (9)+(13). Unicitatea rezultă din unicitatea funcțiilor  $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ .

**Exemplul 7.6.4** Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, & x > 0 \\ y = 0, & z = x. \end{cases}$$

Sistemul simetric este  $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$  sau  $xx' + yy' = 0$ , de unde rezultă integrala primă  $x^2 + y^2 = c$ . Soluția generală este  $z = \phi(x^2 + y^2)$ , unde  $\phi$  este o funcție arbitrară de clasă  $C^2$  pe  $\mathbb{R}^2$ . Din relațiile  $x^2 + y^2 = c$ ,  $y = 0$ ,  $z = x$  deducem  $x = \sqrt{c}$  și mai departe  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Așadar, soluția problemei Cauchy este  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x > 0$ .

O ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniară este de forma:

$$P_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + P_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = P_{n+1}(x_1, \dots, x_n, u) \quad (15)$$

unde  $P_i$  sunt funcții continue și lipschitziene pe o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  și  $\sum_{i=1}^{n+1} P_i^2 \neq 0$  pe  $D$ . Căutăm soluția ecuației (15) sub forma funcției implicate  $u = u(x_1, \dots, x_n)$ , definită de ecuația  $V(x_1, \dots, x_n, u) = 0$ , unde  $V$  este o funcție de clasă  $C^1$  pe  $D$  și  $\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0$  pe  $D$ .

Din Teorema funcțiilor implicate rezultă că

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad i = \overline{1, n} \quad (16)$$

Înlocuind (16) în (15) rezultă:

$$P_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_1} + \dots + P_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_n} + P_{n+1}(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \quad (17)$$

Am obținut astfel o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară. Soluția ecuației (17) este de forma  $V = \phi[\varphi_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u)]$ ,  $(x_1, \dots, x_n, u) \in \Omega$ , unde  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sunt  $n$  integrale prime independente ale sistemului  $\frac{x'_1}{P_1} = \dots = \frac{x'_n}{P_n} = \frac{u'}{P_{n+1}}$ .

**Exemplul 7.6.5** Să se afle soluția generală a ecuației

$$2y \frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 6x^2 y = 0 \text{ și apoi să se rezolve problema Cauchy } x = 0; y^2 = 2z.$$

Sistemul simetric atașat este:  $\frac{x'}{2y} = \frac{y'}{3x^2} = \frac{z'}{-6x^2 y} = 1$ .

Din  $3x^2 x' = 2yy'$  deducem  $x^3 - y^2 = C_1$ .

Din  $3x^2 x' = -z'$  deducem  $x^3 + z = C_2$ .

Soluția generală a ecuației este funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $\phi(x^3 - y^2, x^3 + z) = 0$ , unde  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$  este o funcție arbitrară. Pentru a rezolva problema Cauchy eliminăm variabilele  $x, y, z$  între relațiile:

$$\begin{cases} x^3 - y^2 = C_1 \\ x^3 + z = C_2 \\ x = 0 \\ y^2 = 2z \end{cases}$$

și obținem  $C_1 + 2C_2 = 0$ . Înlocuind  $C_1$  și  $C_2$  cu expresiile din membrul stâng, obținem:  $x^3 - y^2 + 2x^3 + 2z = 0$ . Rezultă că

$z = \frac{1}{2}(y^2 - 3x^3)$  este soluția problemei Cauchy.